Über die

DEFORMATION VON HÄUTEN

RHOMBISCHER STRUKTUR

unter Einwirkung von Umfangskräften, die in der Ebene der Haut liegen.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen Philosophischen Fakultät, Sektion II,

der Königlich Bayrischen Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 28. Januar 1901 vorgelegt von

Wilhelm Schlink,

Grossherzoglich Hessischer Regierungs-Bauführer aus Darmstadt.

1902.

Heuser's Verlag (Louis Heuser).

Neuwied & Leipzig.

Über die

DEFORMATION VON HÄUTEN

RHOMBISCHER STRUKTUR

unter Einwirkung von Umfangskräften, die in der Ebene der Haut liegen.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen Philosophischen Fakultät, Sektion II,

der Königlich Bayrischen Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 28. Januar 1901 vorgelegt von

Wilhelm Schlink

Grossherzoglich Hessischer Regierungsbauführer aus Darmstadt

ACAD.
MED.BAT.
BIBL.

1902.

Heuser's Verlag (Louis Heuser).

Neuwied und Leipzig.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn

Professor Dr. Finsterwalder

in München

in dankbarer Ergebenheit

gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552325_0062

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Einleitung: Rekapitulation der von Herrn Professor Finsterwalder angegebenen geometrischen Lösung zur Bestimmung der Deformation und der Spannungen eines Netzes mit rhombischen Maschen unter Einwirkung von Umfangskräften. . . . . 7—12

I. Aufstellung der Differentialgleichungen des Problems und die Lösungen derselben . . . . . 13—19

1) Die Differentialgleichungen der deformirten Haut 13

2) Diejenigen für die Spannungen σ_v, σ_w, soferne die Funktionen $\lambda(w)$, $\mu(v)$ gegeben sind 15

II. Ermittlung der Deformation und der Spannungen an einer beliebigen Stelle der Haut, falls auf dieselbe gegebene Umfangskräfte wirken, die in der Ebene der Haut liegen . . . . . 20—47

3) Bestimmung der Deformation der rechteckig begrenzten Haut . . 20

4) Beispiel: Ermittlung der Deformation bei einfacher Kräftewirkung; die Linien $w = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ ergeben sich als Kettenlinien . . 24

5) Bestimmung der Deformation einer ganz beliebig begrenzten Haut . 29

6) Beispiel: Ermittlung der Deformation einer Haut, die im undeformirten Zustand die Form eines Rhombus' hat 31

7) Die Differentialgleichungen der Deformationskurven bei gegebnen äusseren Kräften und ihr Zusammenhang mit den Gleichungen der Seilkurve 38

8) Bestimmung der Spannungen σ_v, σ_w für die rechteckige und die beliebig begrenzte Haut 42

III. Ermittlung der Spannungen σ_v, σ_w, sowie der Randspannungen und der äusseren Kräfte, soferne die Funktionen $\lambda(w)$ und $\mu(v)$ gegeben sind . . . . . 47—67

9) Bestimmung der Spannungen σ_v, σ_w aus dem Gespinnst mittels Grenzübergangs 47

10) Die geometrische Bedeutung der willkürlichen Funktionen $\psi(w)$, $\chi(v)$ in den Gleichungen (17), (18); singuläre Stellen der Haut und spec. Fälle der Deformation 54

11) Die analytische Bestimmung der Randspannungen und der äusseren Kräfte 58

12) Beispiele zu den vorhergehenden Ausführungen 61

IV. Von den Hauptspannungen und den Spannungstrajektorien. . . 67—77

13) Die Ermittlung der Hauptspannungen und der Hauptrichtungen . 67

14) Anwendung der allgemeinen Resultate auf ein Beispiel; Ermittlung des Netzes der Spannungstrajektorien für ein solches; Aufstellung der Differentialgleichungen für die Spannungstrajektorien 73

Lebenslauf 79

In seiner Abhandlung: „Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation“*) giebt Herr Professor Finsterwalder an, wie sich auf mechanischem Wege deformirbare Häute herstellen lassen. Eine besondere Rolle spielen hierbei die „Netze“, d. h. Gebilde, welche durch Zusammenfügen einer Reihe von starren Stäben, die an ihren Enden beweglich verbunden sind, entstehen. Die Darstellung von beweglichen Flächen durch solche Netze entspricht derjenigen von Kurven durch Ketten. Wir können ein derartiges Netz aus Dreiecken herstellen, werden aber einen höheren Grad von Deformationsfähigkeit erreichen, wenn wir dasselbe aus viereckigen Maschen zusammensetzen. Im Folgenden werden wir Netze mit kongruenten rhombischen Maschen betrachten, von denen je 4 um einen Punkt herum liegen. Wir können dieselben stets in eine Ebene so ausbreiten, dass die Rhomben Quadrate werden; diesen Zustand bezeichnen wir als undeformirten, oder Grundzustand. Solche Netze wurden zuerst von Tschebytschef und Voss**) untersucht; im Zusammenhang damit veröffentlichte letzterer einen Aufsatz über äquidistante Kurvensysteme***).

In erwähnter Abhandlung wurde nun die Frage gestellt: „Welche Form nimmt das Netz an, wenn an Punkten seines Umfangs und in seiner Ebene liegend Kräfte wirken, die sich das Gleichgewicht

---

*) „Bericht, erstattet auf der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“.

**) Mathem. Ann. Band 19: Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Flächen.

***) Dyck, Katalog mathem. Modelle.

halten?“ — Die Lösung wurde durchgeführt mit Hilfsmitteln der graphischen Statik, und es ergab sich, dass die Form des Netzes, sowie die Spannungen in den Maschenseiten bestimmt sind, sobald die äusseren Kräfte der Grösse und Richtung nach gegeben sind. —

Damit eine Anzahl von Kräften im Gleichgewicht ist, muss das aus denselben gebildete Polygon geschlossen sein. Sollen beispielsweise (Fig. 1) die Kräfte 1, 2, 3, 4 Gleichgewicht halten, so gehört zu diesen ein Kräftevieleck L M N O.

Nun fragen wir uns: In welche Rhombusform stellt sich das Quadrat A B C D (Fig. 2) unter Einwirkung der Kräfte 1, 2, . . . 8 ein? Denken wir uns den Rhombus aus einem Netz mit rhombischen Maschen herausgeschnitten, so werden je 2 Kräfte einander parallel sein: 1 ‖ 2, 3 ‖ 4 . . . Damit eine Gleichgewichtslage möglich ist, muss das Polygon der Kräfte 1, 2 . . . 8 geschlossen sein. Ferner müssen die im Punkte A, bezw. B, C und D angreifenden Kräfte 8, 1, I, IV bezw. I, 2, 3, II u. s. w. einander Gleichgewicht halten, also je ein geschlossenes Polygon bilden. Betrachten wir die beiden ersteren Kraftpolygone, so erkennen wir sofort, dass im Kräfteplan die Kräfte II′, IV′ in eine Gerade fallen müssen, da die zugehörigen Maschenseiten parallel sind, und die Spannung I′ beiden Kraftpolygonen gemeinsam ist. Der Kräfteplan für den deformirten Rhombus wird demnach die gezeichnete Gestalt haben; die Transversalen des Kraftpolygons Q R S T geben uns die Richtungen der Rhombusseiten nach der Deformation, die Strecken I′, II′, III′, IV′ die Spannungen in denselben an.

Von dieser einzelnen Masche können wir ohne Schwierigkeit zum quadratischen Netz übergehen, auf welches Umfangskräfte wirken. Das Polygon dieser Kräfte muss geschlossen sein. Der Kräfteplan wird aus diesem Kraftpolygon und einer entsprechenden grösseren Anzahl von Transversalen bestehen. Wir finden folgende Regel: „Um die Richtung einer Reihe von parallelen Rhombenseiten des Netzes — also die parallele Transversale — zu finden, haben wir im Kräfteplan die Kräfte in das Auge zu fassen, welche in den End-

punkten der Randseiten dieser parallelen Glieder angreifen (z. B. 7, 6, 15, 14 in Fig. 3) und die Zusammenstosspunkte der Kräfte, die an demselben Randgliede des Netzes wirken, (also Punkt [15, 14] bezw. [6, 7]) mit einander zu verbinden". — Durch die Strecken, welche diese verschiedenen Transversalen auf einander abschneiden, sind die Spannungen bestimmt, die in den Maschenseiten herrschen.

Den Kräfteplan wollen wir als „Gespinnst" bezeichnen, das zu dem Netz gehört. In dem deformirten Netz treten zwei bestimmte Linienzüge auf; durch Verschiebung des einen parallel mit sich selbst, der Art, dass ein fester Punkt desselben den anderen Linienzug beschreibt, ergiebt sich die Gleichgewichtsform des Netzes bei Einwirkung der gegebenen Umfangskräfte.

Netz und Gespinnst sind reciproke Figuren im Sinne der graphischen Statik; wir können das Gespinnst als Netz auffassen und das frühere Netz als zugehörigen Kräfteplan; da in diesem neuen Gespinnst alle Seiten gleich lang sind, so sind in dem neuen Netz alle Fäden gleich stark gespannt.

Die Art der Spannung — Zug oder Druck — geht aus den Kräftevierecken des Gespinnstes hervor, welche den Knotenpunkten des Netzes entsprechen. Man bezeichnet die Spannung, deren Richtung vom Knotenpunkt fortstrebt, als Zug, diejenige, die nach dem Knoten hinstrebt, als Druck. Wir können dann leicht bestimmen, ob Zug oder Druck in den Maschenseiten herrscht, wenn wir bedenken, dass beim Durchlaufen eines Kräftepolygons der Richtungssinn der Kräfte der gleiche sein muss. Wir können beispielsweise aus dem Kraftpolygon (16, 1, 17, 32) der Fig. 4 sofort erkennen, dass die Pfeile der unbekannten Spannungen 17, 32 vom Knotenpunkt fortstreben, dass also Zugspannungen vorliegen. Solange die Vierecke des Gespinnstes nicht überschlagen sind, können nur Zug- oder nur Druckspannungen auftreten.

Sollte das aus quadratischen Maschen bestehende Netz staffelförmig begrenzt sein, so ist die Ermittlung der Deformation desselben und der Spannungen in den Maschenseiten auf ganz ent-

sprechende Art durchzuführen; wir zeichnen — vgl. Fig. 5 — das Polygon der äusseren Kräfte auf und machen Gebrauch von der auf S. 8 angegebenen Regel.

In erwähnter Abhandlung wies Herr Professor Finsterwalder darauf hin, dass man durch Grenzübergang von einem solchen Netz ohne besondere Schwierigkeit zur Haut gelangen könne: wir lassen einfach die Maschen unendlich klein werden. An die Stelle der erwähnten Linienzüge treten alsdann Kurven $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ ein. Wir wollen im Folgenden die Deformations- und Spannungsverhältnisse einer solchen Haut von rhombischer Struktur näher kennen lernen.

Im I. Teile sind die Differentialgleichungen für die Deformationskurven $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ aufgestellt und ist gezeigt, dass die Deformation bestimmt ist, sobald zwei willkürliche Funktionen $\lambda(w)$, $\mu(v)$ gegeben sind. Weiter werden die Differentialgleichungen für die Spannungen angegeben, die in Richtung der Deformationskurven an jeder Stelle der Haut herrschen, soferne die Deformation der Haut bekannt ist. In den Lösungen für σ_v, σ_w — d. s. die Spannungen in Richtung der Kurven $w = \text{const.}$, bezw. $v = \text{const.}$ — treten zwei willkürliche Funktionen $\psi(w)$, $\chi(v)$ auf, entsprechend dem Umstande, dass bei Aufzeichnung des Gespinnstes, das zu einem deformirten Netz gehört, noch zweifache Willkür vorhanden ist.

Im II. Teile werden die Deformation der Haut und die Spannungen an irgend einer Stelle bestimmt, soferne die Kräfte, die längs des Randes einer beliebig begrenzten Haut kontinuirlich wirken, gegeben sind, und zwar wird hierbei die in erwähnter Abhandlung durchgeführte geometrische Lösung ins Analytische übertragen und gezeigt, dass die Lösungen eine Form annehmen, wie sie die unter I aufgestellten Differentialgleichungen verlangen.

Im III. Teil nehmen wir die willkürlichen Funktionen $\lambda(w)$, $\mu(v)$ als gegeben an und suchen den Spannungszustand einer beliebig ausgedehnten Haut zu ermitteln. Um denselben eindeutig festzulegen, führen wir die Enveloppen der Gespinnstlinien ein,

stellen die Formeln auf, wodurch irgend einem Punkt der Hautebene ein ganz bestimmter Punkt der Gespinnstebene zugewiesen wird, geben allgemeine Formeln für σ_v, σ_w an und zeigen, welche geometrische Bedeutung die unter I eingeführten willkürlichen Funktionen $\psi(w)$, $\chi(v)$ besitzen. Wir betrachten sodann die singulären Stellen der Haut. Für alle Punkte, an welchen $\lambda = \mu$ wird, tritt ein Ueberschlagen der Haut ein, und die Spannungen werden unendlich gross; ein specieller Fall ist der, dass überhaupt die ganze Haut in eine Kurve zusammengedrängt wird. Besondere Beachtung verdienen die Stellen der Haut, an welchen die Spannung σ_v oder σ_w, verschwindet; mit Hülfe des Gespinnstes sind dieselben sofort anzugeben.

Sind die Funktionen $\lambda(w)$, $\mu(v)$ und ausserdem in der undeformirten Haut die geometrischen Oerter der Punkte gegeben, in welchen $\sigma_v = 0$ bezw. $\sigma_w = 0$ ist, so kann der Spannungszustand im Inneren der deformirten Haut bestimmt werden.

Denken wir uns nun die Haut durch einen beliebigen Rand begrenzt, so können nach Ermittlung der Spannungen σ_v, σ_w die Spannungen bestimmt werden, die längs des Randes auftreten und alsdann die angreifenden Kräfte, welche die vorgegebene Deformation hervorrufen. Hierbei zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen einer solchen Haut, deren Begrenzung mit einer Deformationskurve zusammenfällt und einer solchen, welche von einer anderen Kurve begrenzt ist. Im letzteren Falle sind durch σ_v, σ_w die Randspannungen und die äusseren Kräfte eindeutig bestimmt; aber bei der ersteren Begrenzung tritt in den Ausdrücken für die Randspannungen noch eine willkürliche Funktion auf, die nur der Bedingung unterworfen ist, dass sie für den Anfangs- und Endpunkt dieser Begrenzungskurve verschwindet. Man kann die zugehörige Kräftekurve beliebig verändern, solange sie nur durch die Eckpunkte des Gespinnstes geht; fällt die Kräftekurve in die Verbindungslinie dieser Eckpunkte, so treten endliche specifische Randspannungen auf; in diesem Fall besitzen die willkürlichen Funktionen den Wert

Null; liegt aber eine wirkliche Kräftekurve vor, so erhalten wir unendlich grosse specifische Spannungen; um dieselben zu übertragen, ist es nötig, längs des betr. Randes ein Seil zu führen.

Im IV. Teile sind allgemeine Formeln zur Ermittlung der Hauptspannungen und Hauptrichtungen für eine beliebige Stelle der Haut aufgestellt und es wird gezeigt, dass man die Haut bezügl. ihrer Spannungsverhältnisse auch durch ein Netz ersetzen kann, das von zwei orthogonalen Kurvensystemen — Spannungstrajektorien — gebildet wird; die Differentialgleichungen dieser Kurven werden angegeben.

Bezüglich der Figuren ist zu bemerken, dass Druckspannungen in den Netzfäden durch doppelte Linien angedeutet sind, Zugspannungen durch einfache, und dass die Netzfäden entsprechend der verschiedenen Stärke der Spannungen verschieden kräftig ausgezogen sind.

I. Aufstellung der Differentialgleichungen des Problems und die Lösung derselben.

1. Die Differentialgleichungen der deformirten Haut.

Ein Punkt der Haut, der vor der Deformation die geradlinigen Koordinaten w, v hatte, wird nach der Deformation die gleichgrossen, aber krummlinigen Koordinaten w, v besitzen. Sind die Kurven $w = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ bestimmt, so kennen wir die Lage eines im undeformirten Zustand der Haut gegebenen Punktes nach der Deformation.

Wir legen durch einen Randpunkt der Haut — dem wir die Koordinaten $w = 0$, $v = 0$ zuweisen — ein rechtwinkliges Axensystem, die positive ξ-Axe nach rechts, die positive η-Axe nach unten (vgl. z. B. Fig. 8) und fragen nach der Form, in der sich die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η eines beliebigen Punktes w, v nach der Deformation darstellen.

Für die äquidistanten Kurven-systeme der deformirten Haut bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial w}\right)^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

in welchen w und v die unabhängigen Variablen sind. In der Lösung derselben werden zwei willkürliche Funktionen zu erwarten sein. Durch Differentiiren der Gleichungen erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \cdot \partial w} + \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \cdot \partial w} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \cdot \partial w} + \frac{\partial \eta}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \cdot \partial w} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Fassen wir $\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \cdot \partial w}$ und $\frac{\partial^2 \eta}{\partial v \cdot \partial w}$ als Unbekannte auf, so liegen 2 homogene Gleichungen vor. Ist $\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \cdot \partial w}$ und $\frac{\partial^2 \eta}{\partial v \cdot \partial w}$ von Null verschieden, so liefert die notwendig bestehende Gleichung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial w} = \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

die Beziehung $\eta = f(\xi)$.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (1) erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 \cdot \left\{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right\} = 1$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial w}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right\} = 1,$$

also muss sein:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \pm \frac{\partial \xi}{\partial w} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

und entsprechend

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial w} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Diese Differentialgleichungen liefern das Resultat:

und:
$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(v \mp w) \\ \eta &= \psi(v \mp w) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

wobei die Funktionen φ und ψ durch die Gleichung verbunden sind:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 1.$$

Die Gleichungen (6) stellen eine Kurve dar; die Haut wird so deformirt, dass sie sich in eine Linie zusammendrängt; bezüglich dieses Ausnahmefalles vgl. Nr. 10.

Verschwindet die Determinante der Gleichungen (2) nicht, so können diese nur neben einander bestehen, wenn:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \cdot \partial w} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \cdot \partial w} = 0 \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$\xi = f(v) + \varphi(w). \qquad \eta = g(v) + \gamma(w) \quad \ldots \quad 8)$$

Gemäss den Gleichungen (1) bestehen die Beziehungen:

$$f'^2(v) + g'^2(v) = 1. \qquad \varphi'^2(w) + \gamma'^2(w) = 1.$$

Um diesen Zusammenhang in den Gleichungen (8) auszudrücken, setzen wir:

$$f'(v) = \cos\mu(v) \qquad \varphi'(w) = \cos\lambda(w)$$
$$g'(v) = \sin\mu(v) \qquad \gamma'(w) = \sin\lambda(w)$$

und erhalten für die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η eines beliebigen Punktes w, v nach der Deformation die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \int_0^v \cos\mu(v)\cdot dv + \int_0^w \cos\lambda(w)\cdot dw \\ \eta &= \int_0^v \sin\mu(v)\cdot dv + \int_0^w \sin\lambda(w)\cdot dw \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 9)$$

$\lambda(w)$ und $\mu(v)$ sind willkürliche Funktionen; sind dieselben angenommen, so ist dadurch die Deformation der Haut mit rhombischer Struktur bestimmt.

Geometrisch aufgefasst sind λ (bezw. μ) die Winkel, welche die Tangente an die Kurve $v = \text{const.}$ ($w = \text{const.}$) im Punkte ξ, η mit der ξ-Axe einschliesst.

---

2. Die Differentialgleichungen für die Spannungen σ_v, σ_w, soferne die Funktionen $\lambda(w)$, $\mu(v)$ gegeben sind.

Um uns über die Spannungsverhältnisse einer solchen deformirten Haut klar zu werden, denken wir uns zunächst die Spannungen $\triangle S_v$ und $\triangle S_w$, die in den einzelnen Maschenseiten eines Netzes mit sehr kleinen Maschen dv, dw in Richtung der Kurven $w = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ wirken, ermittelt. Von diesem Netz gehen wir zur Haut über und greifen an einer beliebigen Stelle der Haut ein Flächenelement heraus, so zwar, dass von einem Punkt nach beiden Seiten der w-Richtung die Strecke $\frac{dw}{2}$, nach beiden Seiten der v-Richtung $\frac{dv}{2}$ abgetragen wird. Auf dieses Hautelement — vgl. Fig. 6 — wirken bestimmte Kräfte, die nichts anderes bedeuten wie die Spannungen in den Fäden des Netzes, von dem wir ausgegangen sind: auf die obere Seite $\triangle S_v$, auf die linke $\triangle S_w$ und auf die gegenüberliegenden Seiten: $\triangle S'_v$ und $\triangle S'_w$, wobei sich im allgemeinen $\triangle S_v$ und $\triangle S'$, sowie $\triangle S_w$ und $\triangle S'_w$ um eine

unendlich kleine Grösse unterscheiden. Die specifischen Spannungen sind durch:

$$\sigma_v = \frac{\triangle S_v}{dw} \qquad \sigma_w = {}_s\frac{\triangle S_w}{dv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

gegeben, wenn wir dw, dv als so klein voraussetzen, dass eine gleichmässige Verteilung der Kräfte $\triangle S_v$, $\triangle S_w$ über dw, dv angenommen werden kann. Wir gehen nun zu den Komponenten über und setzen zur Bestimmung der positiven Richtung fest: Ist die eine Komponente (${}_x\sigma_w$ bezw. ${}_y\sigma_v$) von dem Hautelement nach aussen fortgerichtet und sieht man längs derselben in Richtung der positiven Axe gegen das Hautelement, so geht die positive andere Komponente ebenfalls in Richtung der positiven Axe. Es bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} {}_x\sigma_w &= \sigma_w \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w} = \sigma_w \cdot \cos \lambda\,(w) & {}_y\sigma_w &= -\sigma_w \cdot \sin \lambda\,(w) \\ {}_x\sigma_v &= -\sigma_v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\sigma_v \cdot \cos \mu\,(v) & {}_y\sigma_v &= \sigma_v \cdot \sin \mu\,(v) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 11)$$

Die Spannungen σ'_w, σ'_v besitzen die Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} {}_x\sigma'_w &= {}_x\sigma_w + \frac{\partial\, {}_x\sigma_w}{\partial w} \cdot dw & {}_y\sigma'_w &= {}_y\sigma_w + \frac{\partial\, {}_y\sigma_w}{\partial w} \cdot dw \\ {}_x\sigma'_v &= {}_x\sigma_v + \frac{\partial\, {}_x\sigma}{\partial v} \cdot dv & {}_y\sigma'_v &= {}_y\sigma_v + \frac{\partial\, {}_y\sigma_v}{\partial v} \cdot dv \end{aligned}\right\} \quad . \quad 12)$$

Damit die an dem Hautelement wirkenden Kräfte im Gleichgewicht stehen, muss die Summe der Kraftkomponenten in zwei Richtungen — als welche wir die ξ- und η-Richtung einführen — verschwinden:

$${}_x\sigma_v \cdot dw - {}_x\sigma'_v \cdot dw = {}_x\sigma_w \cdot dv - {}_x\sigma'_w \cdot dv,$$
$${}_y\sigma_v \cdot dw - {}_y\sigma'_v \cdot dw = {}_y\sigma_w \cdot dv - {}_y\sigma'_w \cdot dv.$$

Bedenken wir, dass $dw = dv$ ist, und benützen wir die Beziehungen (11) und (12), so erhalten wir folgende zwei Differentialgleichungen, welchen die Spannungen σ_v, σ_w unterworfen sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(\sigma_v \cdot \cos \mu\,(v)) + \frac{\partial}{\partial w}(\sigma_w \cdot \cos \lambda\,(w)) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}(\sigma_v \sin \mu\,(v)) + \frac{\partial}{\partial w}(\sigma_w \cdot \sin \lambda\,(w)) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

In diesen Gleichungen sind bei gegebenen Deformationskurven $\lambda\,(w)$, $\mu\,(v)$ bekannte Funktionen, während σ_v, σ_w als die abhängigen

Variabeln ermittelt werden müssen; v und w sind die unabhängigen Variabelen.

Schreiben wir die Gleichungen (13) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\sigma_w \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\sigma_w \cdot \frac{\partial \eta}{\partial w}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 14)$$

so erkennen wir leicht den engen Zusammenhang, der zwischen den v- bezw. w-Kurven eines Netzes mit unendlich kleinen Maschen und einer Kettenlinie (Seilkurve) besteht. Wenn wir die auf das Element d s eines Seiles wirkenden Kräfte mit X · d s, Y · d s und die Spannung des Seiles an der Stelle ξ, η mit T bezeichnen, so werden die Gleichungen*) befriedigt:

$$\frac{d}{ds}\left(T \cdot \frac{d\xi}{ds}\right) = X.$$

$$\frac{d}{ds}\left(T \cdot \frac{d\eta}{ds}\right) = Y.$$

Die Kurve v = const. kann demnach als ein Seil betrachtet werden, auf welches pro Längeneinheit die Kraftkomponenten:

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) \quad \text{und} \quad -\frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v}\right)$$

einwirken. Wir erkennen dies auch leicht auf Grund der Fig. 6, indem an die Stelle von der Komponente X d s nun

$$({}_x\sigma_v - {}_x\sigma'_v) \cdot dw = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) \cdot dv \cdot dw$$

und an die Stelle von Y · d s:

$$({}_y\sigma_v - {}_y\sigma'_v) \cdot dw = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) \cdot dv \cdot dw$$

einzutreten hat, und T durch $\sigma_w \cdot dv$ zu ersetzen ist; also

$$d\left(T \cdot \frac{d\xi}{ds}\right) \text{ durch } \frac{\partial}{\partial w}\left(\sigma_w \cdot dv \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w}\right) dw$$

$$\text{und } d\left(T \cdot \frac{d\eta}{ds}\right) \text{ durch } \frac{\partial}{\partial w}\left(\sigma_w \cdot dv \cdot \frac{\partial \eta}{\partial w}\right) dw.$$

*) Vergl. z. B.: Henneberg, Statik der starren Systeme, S. 62.

Wir erhalten demnach:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\sigma_w \cdot dv \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w}\right) \cdot dw = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) \cdot dv \cdot dw,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\sigma_w \cdot dv \cdot \frac{\partial \eta}{\partial w}\right) \cdot dw = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\sigma_v \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) \cdot dv \cdot dw$$

und gelangen sofort zu den Gleichungen (14).

Um eine Lösung der Differentialgleichungen (13) zu erhalten, führen wir an Stelle der abhängigen Variabelen σ_v, σ_w neue Funktionen F (v, w) und Φ (v, w) ein und setzen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_v \cdot \cos \mu &= -\frac{\partial F}{\partial w}, & \sigma_v \cdot \sin \mu &= \frac{\partial \Phi}{\partial w} \\ \sigma_w \cdot \cos \lambda &= \frac{\partial F}{\partial v}, & \sigma_w \cdot \sin \lambda &= -\frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 15)$$

Wir können demnach die Beziehungen anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial w} &= -\operatorname{tg} \mu(v) \cdot \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= -\operatorname{tg} \lambda(w) \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

aus welchen sich:

$$\Phi = -F \cdot \operatorname{tg} \mu(v) + \psi(v),$$

$$\Phi = -F \cdot \operatorname{tg} \lambda(w) + \chi(w)$$

ergiebt, wobei $\psi(v)$ und $\chi(w)$ willkürliche Funktionen sind.

Setzen wir diese Werte Φ einander gleich, so finden wir:

$$F = \frac{\chi(w) - \psi(v)}{\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tg} \mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

und alsdann:

$$\Phi = \frac{\psi(v) \cdot \operatorname{tg} \lambda - \chi(w) \cdot \operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tg} \mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

Bilden wir mit diesen Ausdrücken die Gleichungen 16, so werden dieselben in der That befriedigt. Wir können dieselben auch in der Form schreiben:

$$F = \frac{\psi(v) \cdot \cos \lambda \cdot \cos \mu - \chi(w) \cdot \cos \lambda \cdot \cos \mu}{\sin (\mu - \lambda)} \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

$$\Phi = \frac{\psi(v) \cdot \sin \lambda \cdot \cos \mu - \chi(w) \cdot \sin \mu \cdot \cos \lambda}{\sin (\mu - \lambda)} \quad . \quad . \quad 20)$$

Mit Benutzung dieser Werte erhalten wir aus den Gleichungen (15):

$$\sigma_v = \frac{\{\chi(w) - \psi(v)\} \cdot \cos \mu \cdot \frac{d\lambda}{dw} - \sin (\lambda - \mu) \cdot \cos \lambda \cdot \chi'(w)}{\sin^2 (\lambda - \mu)} \quad 21)$$

$$\sigma_w = \frac{\{\chi(w) - \psi(v)\} \cdot \cos \lambda \cdot \frac{d\mu}{dv} - \sin (\lambda - \mu) \cdot \cos \mu \cdot \psi'(v)}{\sin^2 (\lambda - \mu)} \quad 22)$$

Die Gleichungen (13) werden durch diese Ausdrücke befriedigt, wie man sich durch Bildung der Gleichungen überzeugt.

Sind die Funktionen σ_v, σ_w bei einer beliebig begrenzten Haut ermittelt, so kann man die Spannungen längs des Randes bestimmen und alsdann die äusseren Kräfte, durch welche die Haut in die vorgegebene Lage gebracht werden kann, da an jeder Stelle des Randes die Randspannungen mit der äusseren Kraft im Gleichgewicht sein müssen; vgl. III. Teil.

Bevor wir uns mit dem Fall näher beschäftigen, dass die Funktionen $\lambda(w)$ und $\mu(v)$ gegeben sind, lösen wir die Aufgabe: „Längs der Randseiten der Haut wirken gegebene Kräfte, die in der Ebene der Haut liegen; es sollen die Deformation der Haut und die Spannungen σ_v, σ_w an einer beliebigen Stelle bestimmt werden“; übertragen hierbei die von Herrn Professor Finsterwalder angegebene geometrische Durchführung ins Analytische und zeigen, dass die Ermittlung der Lage eines Punktes nach der Deformation auf die Gleichungen (9) führt, und dass für die Spannungen σ_v, σ_w die Differentialgleichungen (13) gelten. Wir werden bei diesen Untersuchungen die rechteckig begrenzte und die beliebig begrenzte Haut getrennt behandeln.

II. Ermittlung der Deformation und der Spannungen an einer beliebigen Stelle der Haut, falls auf dieselbe gegebene Umfangskräfte wirken, die in der Ebene der Haut liegen.

3. Bestimmung der Deformation der rechteckig begrenzten Haut.

Die rechteckig begrenzte Haut geht aus einem solchen Netz hervor, dessen äusserer Umfang bei dem Grundzustand ein rechteckiger ist.

Die Kräfte, welche längs der Randseiten der Haut wirken, mögen als Funktionen der Begrenzungslänge w bezw. v der Grösse und Richtung nach gegeben sein. Die Kraft, welche auf die Längeneinheit der Begrenzung wirkt, sei P, ihre Komponenten X, Y; die Indices l, o, r, u geben an, ob die Kräfte an der linken, oberen, rechten oder unteren Randseite der Haut angreifen. Als positive Richtung für die X-Komponenten führen wir die nach rechts, für die Y-Komponenten diejenige nach oben ein (Fig. 7). Grösse und Richtung der Kräfte P drücken wir dadurch aus, dass wir die Grösse der Komponenten X, Y angeben; es sei:

$$\left.\begin{array}{ll} X_o = f_o(w) & X_l = f_l(v) \\ Y_o = \varphi_o(w) & Y_l = \varphi_l(v) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 23)$$

Dem Punkte $w = 0, v = 0$ — durch welchen wir das Koordinatensystem ξ, η legen — entspricht in der Gespinnstebene (Fig. 8) der Punkt A, in dem die Kräftekurven O und L zusammentreffen. Durch diesen Punkt gehen die Axen x, y, und zwar wollen wir die y-Axe nach oben, die positive x-Axe nach rechts annehmen, wie dies auf Grund der Fig. 8 nahe liegt.

Ein Element der Kräftekurve O hat die Komponenten:

$$\left.\begin{array}{ll} dx_o = X_o \cdot dw = f_o(w) \cdot dw & dy_o = Y_o \cdot dw = \varphi_o(w) \cdot dw; \\ \text{ein solches der Kräftekurve L:} & \\ dx_l = -X_l \cdot dv = -f_l(v) \cdot dv & dy_l = -Y_l \cdot dv = -\varphi_l(v) \cdot dv \end{array}\right\} 24)$$

Entsprechende Formeln gelten für die Elemente der Kräftekurven U und R. Damit eine Gleichgewichtsform der Haut möglich ist, muss die gesamte Kräftekurve, die sich aus O, R, U, L zusammensetzt, geschlossen sein; es müssen demnach folgende 2 Gleichungen bestehen, in denen die Grenze l_w, l_v die Länge der Rechteckseite $v = 0$ und $w = 0$ angiebt:

$$\int_0^{l_w} f_o(w)\,dw + \int_0^{l_v} f_r(v)\,dv + \int_{l_w}^{0} \{-f_u(w)\}\,dw + \int_{l_v}^{0} \{-f_l(v)\}\,dv = 0,$$

$$\int_0^{l_w} \varphi_o(w)\,dw + \int_0^{l_v} \varphi_r(v)\,dv + \int_{l_w}^{0} \{-\varphi_u(w)\}\,dw + \int_{l_v}^{0} \{-\varphi_l(v)\}\,dv = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{l_w} \{f_o(w) + f_u(w)\}\,dw + \int_0^{l_v} \{f_l(v) + f_r(v)\}\,dv &= 0 \\ \int_0^{l_w} \{\varphi_o(w) + \varphi_u(w)\}\,dw + \int_0^{l_v} \{\varphi_l(v) + \varphi_r(v)\}\,dv &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 25)$$

Wir sahen in den einleitenden Bemerkungen, dass jeder Maschenseite des Netzes eine ganz bestimmte Gespinnstlinie entspricht: jeder Maschenseite der Linienzüge $w = \text{const.}$ eine Linie ST und jeder Maschenseite der Linienzüge $v = \text{const.}$ eine Linie GH; (vgl. Fig. 8). Die Regel gab an: man lege durch die Endpunkte der betr. Maschenseite parallele Linienzüge zu dem, welchem die Maschenseite nicht angehört, und verbinde im Gespinnst die Zusammenstosspunkte der Kräfte, welche an den Enden dieser parallelen Linienzüge angreifen. Geht das Netz in eine Haut über, so treten an die Stelle der Linienzüge die Kurven $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ mit den Elementen dw, dv, und der angegebene Streifen zwischen den 2 Linienzügen geht in einen unendlich schmalen Streifen über. Will man nun die Richtung des Elementes dw im Punkte w, v der Haut, also die Richtung der Tangente an die w-Kurve in diesem Punkte haben, so muss man durch diesen Punkt eine Linie $w = \text{const.}$ ziehen, welche die obere und untere Hautbegrenzung in zwei Punkten A, B schneidet, und im Gespinnst die diesen Punkten A, B entsprechenden Punkte G, H mit einander verbinden. Die Koordinaten dieser Punkte G bezw. H sind gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \int_0^w f_0(w)\,dw & y_0 &= \int_0^w \varphi_0(w)\,dw \\ x_u &= \int_0^{1v} \{-f_1(v)\}\,dv + \int_0^w \{-f_u(w)\}\,dw & & \\ y_u &= \int_0^{1v} \{-\varphi_1(v)\}\,dv + \int_0^w \{-\varphi_u(w)\}\,dw & & \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 26)$$

Entsprechend findet man die Gespinnstlinie S T, welche parallel ist zur Tangente an die v-Kurve im Punkte w, v. S bezw. T haben die Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \int_0^v \{-f_1(v)\}\,dv & y_1 &= \int_0^v \{-\varphi_1(v)\}\,dv \\ x_r &= \int_0^{1w} f_0(w)\,dw + \int_0^v f_r(v)\,dv & y_r &= \int_0^{1w} \varphi_0(w)\,dw + \int_0^v \varphi_r(v)\,dv \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

Für die Komponenten der Elemente d v und d w bestehen die Formeln:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v}\cdot dv = dv\cdot\cos\mu, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v}\cdot dv = dv\cdot\sin\mu,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial w}\cdot dw = dw\cdot\cos\lambda, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial w}\cdot dw = dw\cdot\sin\lambda,$$

wenn μ und λ die Winkel sind, welche die Tangente an die Kurve w = const., bezw. v = const. im Punkte w, v mit der ξ-Axe bildet.

Das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck in der Hautebene mit der Hypothenuse d v ist ähnlich demjenigen in der Gespinnstebene mit der Hypothenuse S T; es bestehen demnach die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} -\cos\mu\cdot dv &= k\cdot(x_r - x_1) \\ &= k\left\{\int_0^{1w} f_0(w)\,dw + \int_0^v f_r(v)\,dv - \int_0^v \{-f_1(v)\}\,dv\right\} \\ \sin\mu\cdot dv &= k\cdot(y_r - y_1) \\ &= k\cdot\left\{\int_0^{1w} \varphi_0(w)\,dw + \int_0^v \varphi_r(v)\,dv - \int_0^v \{-\varphi_1(v)\}\,dv\right\} \end{aligned}\right\} \quad 28)$$

Entsprechend findet sich:

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda\cdot d\,w &= k_1\,(x_u - x_o)\\ &= k_1\left\{\int_o^{l\,v}\{-f_l\,(v)\}\,d\,v + \int_o^{w}\{-f_u\,(w)\}\,d\,w - \int_o^{w} f_o\,(w)\,d\,w\right\}\\ -\sin\lambda\cdot d\,w &= k_1\,(y_u - y_o)\\ &= k_1\left\{\int_o^{l\,v}\{-\varphi_l\,(v)\}\,d\,v + \int_o^{w}\{-\varphi_u\,(w)\}\,d\,w - \int_o^{w}\varphi_o\,(w)\,d\,w\right\}\end{aligned}\right\}\quad 28\,a)$$

w, v bedeuten die Koordinaten des beliebigen Punktes w, v, den wir gerade betrachten. Die Faktoren k und k_1 lassen sich durch die Formeln ausdrücken:

$$k = \frac{d\,v}{\sqrt{(x_r - x_l)^2 + (y_r - y_l)^2}} \qquad k_1 = \frac{d\,w}{\sqrt{(x_u - x_o)^2 + (y_u - y_o)^2}} \quad . \; . \quad 29)$$

und wir gelangen demnach zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sin\mu(v) &= \frac{\int_o^{l\,w} f_o\,(w)\,d\,w + \int_o^{v}\{f_r\,(v) + f_l\,(v)\}\,d\,v}{\sqrt{\left\{\int_o^{l\,w} f_o\,(w)\,d\,w + \int_o^{v}\{f_r\,(v) + f_l\,(v)\}\,d\,v\right\}^2 + \left\{\int_o^{l\,w}\varphi_o\,(w)\,d\,w + \int_o^{v}\{\varphi_r\,(v) + \varphi_l\,(v)\}\,d\,v\right\}^2}}\\ \cos\mu\,(v) &= \frac{\int_o^{l\,w}\varphi_o\,(w)\,d\,w + \int_o^{v}\{\varphi_r\,(v) + \varphi_l\,(v)\}\,d\,v}{\sqrt{\left\{\int_o^{l\,w} f_o\,(w)\,d\,w + \int_o^{v}\{f_r\,(v) + f_l\,(v)\}\,d\,v\right\}^2 + \left\{\int_o^{l\,w}\varphi_o\,(w)\,d\,w + \int_o^{v}\{\varphi_r\,(v) + \varphi_l\,(v)\}\,d\,v\right\}^2}}\end{aligned}\right\}\quad 30)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(w) &= \frac{-\int_o^{l\,v} f_l\,(v)\,d\,v - \int_o^{w}\{f_u\,(w) + f_o\,(w)\}\,d\,w}{\sqrt{\left\{\int_o^{l\,v} f_l\,(v)\,d\,v + \int_o^{w}\{f_u\,(w) + f_o\,(w)\}\,d\,w\right\}^2 + \left\{\int_o^{l\,v}\varphi_l\,(v)\,d\,v + \int_o^{w}\{\varphi_u\,(w) + \varphi_o\,(w)\}\,d\,w\right\}^2}}\\ \lambda(w) &= \frac{-\int_o^{l\,v}\varphi_l\,(v)\,d\,v - \int_o^{w}\{\varphi_u\,(w) + \varphi_o\,(w)\}\,d\,w}{\sqrt{\left\{\int_o^{l\,v} f_l\,(v)\,d\,v + \int_o^{w}\{f_u\,(w) + f_o\,(w)\}\,d\,w\right\}^2 + \left\{\int_o^{l\,v}\varphi_l\,(v)\,d\,v + \int_o^{w}\{\varphi_u\,(w) + \varphi_o\,(w)\}\,d\,w\right\}^2}}\end{aligned}\right\}\quad 31)$$

Die deformirten Axen w und v werden durch die Gleichungen:

$$\xi_w = \int_0^w d\,\xi_w = \int_0^w \cos\ \lambda(w) \cdot d\,w \qquad \eta_w = \int_0^w d\,\eta_w = \int_0^w \sin\ \lambda(w) \cdot d\,w \ .\ 32)$$

$$\xi_v = \int_0^v d\,\xi_v = \int_0^v \cos\ \mu(v) \cdot d\,v \qquad \eta_v = \int_0^v d\,\eta_v = \int_0^v \sin\ \mu(v) \cdot d\,v \ .\ 33)$$

dargestellt, in denen die Bogenlänge w bezw. v der Parameter ist.

Ein beliebiger Punkt im Inneren der deformirten Haut besitzt die Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_v + \xi_w = \int_0^v \cos\ \mu(v) \cdot d\,v + \int_0^w \cos\ \lambda(w) \cdot d\,w \\ \eta &= \eta_v + \eta_w = \int_0^v \sin\ \mu(v) \cdot d\,v + \int_0^w \sin\ \lambda(w) \cdot d\,w \end{aligned}\right\} \ .\ 34)$$

Wir sind demnach auf die Formeln (9) gelangt.

---

4. Beispiel: Ermittlung der Deformation einer Haut bei einfacher Kräftewirkung; die Kurven w = const. und v = const. sind Kettenlinien.

Wir nahmen im vorhergehenden an, dass die Kräfte, welche auf die 4 Hautseiten wirken, der Grösse und Richtung nach gegeben sind. Wir können uns nun das Gespinnst auch dadurch festgelegt denken, dass wir nur die Kräfte X_0, Y_0 und X_1, Y_1 geben und weiter eine Kurve W, an welche die Gespinnstlinien der einen Art, sowie eine Kurve V, an welche die Gespinnstlinien der anderen Art tangiren. Einem Punkte w der w-Axe wird ein bestimmter Punkt x_0, y_0 der Kräftekurve O des Gespinnstes entsprechen und ebenso dem Punkte $w = 0$, $v = v$ ein Punkt x_1, y_1. Vom Punkte x_0, y_0 ist eine Tangente an die Kurve W zu ziehen, welche im Punkte x_w, y_w berühren möge; sie ist parallel zum Element d w an der Stelle w. Die Tangente, die vom Punkte x_1, y_1 an die V-Kurve zu ziehen ist, möge im Punkt x_v, y_v tangiren; sie ist parallel zum Element d v an der Stelle v. Wir setzen natürlich voraus, dass nur

ein Berührungspunkt x_w, y_w bezw. x_v, y_v in Frage kommt. Auf Grund ähnlicher Dreiecke in der Haut- und Gespinnstebene erhalten wir:

$$\cos \lambda (w) = \frac{x_w - x_o}{\sqrt{(x_w - x_o)^2 + (y_w - y_o)^2}},$$

$$-\sin \lambda (w) = \frac{y_w - y_o}{\sqrt{(x_w - x_o)^2 + (y_w - y_o)^2}}.$$

$$-\cos \mu (v) = \frac{x_v - x_1}{\sqrt{(x_v - x_1)^2 + (y_v - y_1)^2}},$$

$$\sin \mu (v) = \frac{y_v - y_1}{\sqrt{(x_v - x_1)^2 + (y_v - y_1)^2}}.$$

Von den Enveloppen der Gespinnstlinien wird im III. Teile noch ausführlich gesprochen werden. An dieser Stelle führen wir ein specielles Beispiel durch: An die Stelle der Kurve W trete ein Punkt M_1 mit den Koordinaten g_1, h_1; und an die Stelle von V der Punkt M (g, h); die Kräftekurven O und L seien gerade Linien, von denen erstere durch M, letztere durch M_1 geht. Pro Längeneinheit der oberen bezw. linken Begrenzung der Haut wirke eine Kraft m bezw. q nach auswärts, d. h. $P_o = m$; $P_1 = -q$.

Liegt statt der Haut ein Netz mit endlicher Maschenlänge vor, so kann das Gespinnst und das deformirte Netz leicht aufgezeichnet werden (Fig. 9).

Wir gelangen zu den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \cos \lambda (w) &= \frac{g_1 - \frac{m\,w\,g}{\sqrt{g^2 + h^2}}}{\sqrt{\left\{g_1 - \frac{m\,w\,g}{\sqrt{g^2 + h^2}}\right\}^2 + \left\{h_1 - \frac{m\,w\,h}{\sqrt{g^2 + h^2}}\right\}^2}} \\ -\sin \lambda (w) &= \frac{h_1 - \frac{m\,w\,h}{\sqrt{g^2 + h^2}}}{\sqrt{\left\{g_1 - \frac{m\,w\,g}{\sqrt{g^2 + h^2}}\right\}^2 + \left\{h_1 - \frac{m\,w\,h}{\sqrt{g^2 + h^2}}\right\}^2}} \end{aligned}\right\} 35)$$

$$\left.\begin{aligned} -\cos\,\mu(v) &= \frac{g - \frac{q\cdot v\cdot g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}}{\sqrt{\left\{g - \frac{q\cdot v\cdot g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}\right\}^2 + \left\{h - \frac{q\cdot v\cdot h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}\right\}^2}} \\ \sin\,\mu(v) &= \frac{h - \frac{q\cdot v\cdot h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}}{\sqrt{\left\{g - \frac{q\cdot v\cdot g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}\right\}^2 + \left\{h - \frac{q\cdot v\cdot h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}\right\}^2}} \end{aligned}\right\} 36)$$

Die Integrale (32) (33) können in diesem Falle leicht ausgewertet werden, entbehren aber der Uebersicht. Um die Art der Kurven $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ zu erkennen, nehmen wir Koordinaten-Transformationen vor, und zwar führen wir für die w-Kurve und v-Kurve verschiedene Axensysteme ein. Um das neue System ξ', η' zu erhalten, auf das wir die w-Kurve beziehen, drehen wir das rechtwinklige Axenkreuz ξ, η derart, dass die neue η'-Axe parallel ist mit der Kräftegeraden O des Gespinnstes; und für die v-Kurve legen wir ein neues rechtwinkliges System zu Grunde, dessen ξ''-Axe parallel der Kräftegeraden L ist. Wir haben also die Beziehungen:

$$\xi' = \xi\cdot\frac{h}{\sqrt{g^2+h^2}} + \eta\cdot\frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}}$$

$$\eta' = \eta\cdot\frac{h}{\sqrt{g^2+h^2}} - \xi\cdot\frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}}$$

$$\xi'' = \xi\cdot\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}} - \eta\cdot\frac{h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}$$

$$\eta'' = \eta\cdot\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}} + \xi\cdot\frac{h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}.$$

In der Gespinnstebene führen wir ebenfalls zwei neue Axensysteme x', y' und x'', y'' ein, die den Systemen ξ', η' und ξ'', η'' entsprechen; bei ersterem fällt die y'-Axe mit der Kräftegeraden O zusammen, bei letzterem die Axe x'' mit der Kräftegeraden L; es ist demnach:

$$g_1' = g_1\cdot\frac{h}{\sqrt{g^2+h^2}} - h_1\cdot\frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}}$$

$$h_1' = g_1\cdot\frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}} + h_1\cdot\frac{h}{\sqrt{g^2+h^2}},$$

$$g'' = g \cdot \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + h_1^2}} + h \cdot \frac{h_1}{\sqrt{g_1^2 + h_1^2}}$$

$$h'' = h \cdot \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + h_1^2}} - g \cdot \frac{h_1}{\sqrt{g_1^2 + h_1^2}}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Beziehungen treten an die Stelle der Formeln (35), (36) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda'(w) \cdot dw = d\xi'_w &= \frac{g_1'}{\sqrt{g_1'^2 + (m \cdot w - h_1')^2}} \cdot dw \\ \sin\lambda'(w) \cdot dw = d\eta'_w &= \frac{m \cdot w - h_1'}{\sqrt{g_1'^2 + (m \cdot w - h_1')^2}} \cdot dw \end{aligned}\right\} \quad . \; 37)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\mu''(v) \cdot dv = d\xi''_v &= \frac{q \cdot v - g''}{\sqrt{h''^2 + (q \cdot v - g'')^2}} \cdot dv \\ \sin\mu''(v) \cdot dv = d\eta''_v &= \frac{h''}{\sqrt{h''^2 + (q\,v - g'')^2}} \cdot dv \end{aligned}\right\} \quad . \; 38)$$

Die Kurven $v = 0$ bezw. $w = 0$ sind entsprechend den Ausdrücken (32), (33) durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$\left.\begin{aligned} \xi'_w &= \frac{g_1'}{m} \cdot \lg \frac{\sqrt{g_1'^2 + (m\,w - h_1')^2} + (m\,w - h_1')}{\sqrt{g_1'^2 + h_1'^2} - h_1'} \\ \eta'_w &= \frac{1}{m} \cdot \{\sqrt{g_1'^2 + (m\,w - h_1')^2} - \sqrt{g_1'^2 + h_1'^2}\} \end{aligned}\right\} \quad . \; 39)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi''_v &= \frac{1}{q} \cdot \{\sqrt{(q\,v - g'')^2 + h''^2} - \sqrt{g''^2 + h''^2}\} \\ \eta''_v &= \frac{h''}{q} \lg \frac{\sqrt{(q\,v - g'')^2 + h''^2} + (q\,v - g'')}{\sqrt{h''^2 + g''^2} - g''} \end{aligned}\right\} \quad . \; 40)$$

Die Kurven $v = \text{const.}$ bezw. $w = \text{const.}$ sind Kettenlinien, wie wir leicht erkennen, wenn wir aus den Gleichungen (39) die Grössen w, aus den Gleichungen (40) v eliminiren.

Die negativen Ordinaten η'_w der w-Kurve wachsen von $w = 0$ bis zu dem Punkte $w = \frac{h_1'}{m}$; est ist:

$$\{-\eta'_w\}_{max} = \frac{1}{m}\{g_1' - \sqrt{g_1'^2 + h_1'^2}\};$$

durch diesen Punkt $w = \frac{h_1'}{m}$ geht die Symmetrieaxe der w-Kurve; sie hat die Entfernung:

$$\xi'_w = \frac{g_1'}{m} \cdot \lg \frac{g_1'}{\sqrt{g_1'^2 + h_1'^2} - h_1'}$$

vom Nullpunkt. An der Stelle $w = \frac{2h_1'}{m}$ erreicht η'_w wieder den Wert 0, und von da an werden die Ordinaten positiv und nehmen stets zu.

Die Abscissen ξ'_w wachsen ständig vom Punkte $w = 0$ aus.

Die Abscissen ξ'_v der v-Axe haben zwischen den Punkten $v = 0$ und $v = \frac{2g''}{q}$ negative Werte; ihr Maximum tritt an der Stelle $v = \frac{g''}{q}$ auf:

$$\{-\xi''_v\}_{max} = \frac{1}{q}\{h'' - \sqrt{g''^2 + h''^2}\}.$$

Die Symmetrieaxe der v-Kurve hat die Gleichung:

$$\eta''_v = \frac{h''}{q} \cdot \lg \frac{h''}{\sqrt{g''^2 + h''^2} - g''}.$$

Diese Resultate, die wir auf Grund der Gleichungen (39), (40) gefunden haben, können wir auch leicht aus Fig. 9 ablesen.

Ein specieller Fall unseres Beispiels tritt ein, wenn der Punkt M_1 in die Unendlichkeit rückt (Fig. 10); es ist alsdann:

$$\xi_w = w \qquad \eta_w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_v &= \frac{1}{q}\{\sqrt{(g - q\,v)^2 + h^2} - \sqrt{g^2 + h^2}\} \\ \eta_v &= \frac{h}{q} \cdot \lg \frac{\sqrt{(g - q\,v)^2 + h^2} + (q\,v - g)}{\sqrt{g^2 + h^2} - g} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 42)$$

Die w-Axe ist eine horizontale Gerade, die v-Axe eine Kettenlinie, deren Symmetrieaxe durch die Gleichung gegeben ist:

$$\eta_v = \frac{h}{q} \cdot \lg \frac{h}{\sqrt{g^2 + h^2} - g}.$$

5. Ermittlung der Deformation einer ganz beliebig begrenzten Haut.

Die Hautform, welche wir seither betrachteten, zeichnete sich dadurch aus, dass die Begrenzung mit Deformationslinien $w = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ zusammenfiel. Nun denken wir uns die Haut ganz beliebig abgegrenzt. Die Begrenzungskurve der Haut sei durch die Gleichungen dargestellt:

$$w = F(t) \qquad v = \Phi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43)$$

wobei t einen Parameter angiebt; umgekehrt sei ausgedrückt:

$$t = \psi(w) \qquad t = \chi(v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

Die Kraft, welche auf die Begrenzungskurve pro Längeneinheit des Parameters wirkt, geben wir ebenfalls als Funktion desselben Parameters:

$$X = f(t) \qquad Y = \varphi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

Sollte etwa die Begrenzung aus mehreren Kurven zusammengesetzt sein, so werden natürlich jeder Kurve besondere Funktionen zugehören, doch ist dies für die principielle Behandlung des Problems ganz unwesentlich.

Für die Komponenten eines Elementes der Kräftekurve hat man die Werte:

$$dx = X \cdot dt \qquad dy = Y \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46)$$

Die Kräfte X, Y müssen die Bedingungen erfüllen:

$$\int_{\tau}^{T} X \cdot dt = 0 \qquad \int_{\tau}^{T} Y \cdot dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

wobei τ derjenige Parameterwert ist, der dem Anfangspunkt der Begrenzung, und T derjenige, welcher dem Endpunkt entspricht. Die Linien $v = \text{const.}$ bezw. $w = \text{const.}$, die durch den gerade betrachteten Punkt w, v gezogen werden, mögen die Begrenzungskurve in Punkten schneiden, denen die Parameterwerte ${}_{r}t_{v}$, ${}_{l}t_{v}$, ${}_{o}t_{w}$, ${}_{u}t_{w}$ zugehören (vgl. Fig. 11). Es bestehen die Gleichungen (vgl. die Ausführungen auf S. 21):

$$\cos \mu \cdot dv = -k \cdot \int_{{}_{l}t_{v}}^{{}_{r}t_{v}} X \cdot dt \equiv k \cdot \omega_1(v),$$

$$\sin \mu \cdot dv = k \cdot \int_{{}_{l}t_{v}}^{{}_{r}t_{v}} Y \cdot dt \equiv k \cdot \omega_2(v).$$

$$\cos\lambda\cdot dw = k_1\cdot\int_{{}_0t_w}^{{}_ut_w} X\cdot dt \equiv k_1\cdot\omega_3(w),$$

$$\sin\lambda\cdot dw \equiv -k_1\cdot\int_{{}_0t_w}^{{}_ut_w} Y\cdot dt \equiv k_1\cdot\omega_4(w).$$

Da wir die Parameter t_v, t_w gemäss den Gleichungen (44) durch v und w ausdrücken können, so liefern die Integrale in den beiden oberen Gleichungen Funktionen von v und diejenigen in den beiden unteren Gleichungen solche von w. Es bestehen nun die Beziehungen:

$$k = \frac{dv}{\sqrt{\omega_1^2(v)+\omega_2^2(v)}} \qquad k_1 = \frac{dw}{\sqrt{\omega_3^2(w)+\omega_4^2(w)}}$$

und wir erhalten die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} -\cos\mu(v) &= \frac{\int_{t=\chi_1(v)}^{t=\chi_r(v)} X(t)\cdot dt}{\sqrt{\left\{\int_{t=\chi_1(v)}^{t=\chi_r(v)} X(t)\cdot dt\right\}^2+\left\{\int_{t=\chi_1(v)}^{t=\chi_r(v)} Y(t)\cdot dt\right\}^2}} \\ \sin\mu(v) &= \frac{\int_{t=\chi_1(v)}^{t=\chi_r(v)} Y(t)\cdot dt}{\sqrt{\left\{\int_{t=\chi_1(v)}^{t=\chi_r(v)} X(t)\cdot dt\right\}^2+\left\{\int_{t=\chi_1(v)}^{t=\chi_r(v)} Y(t)\cdot dt\right\}^2}} \end{aligned}\right\} \quad 48)$$

und entsprechende Werte für $\cos\lambda(w)$ und $\sin\lambda(w)$.

Um die Gleichungen der deformirten Randkurve zu erhalten, haben wir in den Gleichungen, die die Koordinaten eines beliebigen Punktes w, v der deformirten Haut angeben:

$$\xi = \int_0^w \cos\lambda(w)\,dw + \int_0^v \cos\mu(v)\,dv,$$

$$\eta = \int_0^w \sin\lambda(w)\,dw + \int_0^v \sin\mu(v)\,dv,$$

die Variabelen w, v durch die Funktionen F (t) und Φ (t) zu ersetzen.

Besteht die Hautbegrenzung aus mehreren, an einander gefügten Kurven — was allerdings bei der mathematischen Behandlung keine Rolle spielt — so werden sich im allgemeinen die Deformationskurven aus mehreren Teilen zusammensetzen, entsprechend

dem Umstand, dass die Linien $w = \text{const.}$ bezw. $v = \text{const.}$ in verschiedenen Gebieten verschiedene Randkurven treffen. Für die in Fig. 12 dargestellte Haut werden die Kurven $w = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ aus drei Teilen bestehen: innerhalb des Rechtecks sind sie anderer Art, wie ausserhalb desselben. Sind die Kräfte, die auf eine Begrenzungskurve wirken, parallel, so werden sich die v-Linien des oberen und unteren Gebietes, bezw. die w-Linien des linken und rechten Teiles in gerade Linien einstellen, die die Richtung dieser Kräfte haben.

Im Gebiet ABCDE der in Fig. 13 dargestellten Haut schneidet die Linie $w = \text{const.}$ die Haut in vier Punkten mit den zugehörigen Parametern t_1, t_2, t_3, t_4; für die w-Kurven des Teiles ABC kommen die Parameterwerte t_1, t_2 als Grenzen der Integrale in Betracht, für diejenigen des Teiles CDE die Werte t_3, t_4.

---

6. Beispiel: Ermittlung der Deformation einer Haut, die im undeformirten Zustand die Form eines Rhombus' hat.

Die Begrenzungsgeraden mögen durch folgende Gleichungen dargestellt sein (vgl. Fig. 14):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. } v = \dfrac{b_1}{a_1} \cdot w & \text{II. } v = \dfrac{b_3}{a_3} \cdot w - \dfrac{b_3}{a_3} \cdot a_1 + b_1 \\ \text{III. } v = \dfrac{b_1}{a_1} \cdot w - \dfrac{b_1}{a_1}(a_1 + a_3) + b_1 + b_3 & \text{IV. } v = \dfrac{b_3}{a_3} \cdot w \end{array}\right\} 49)$$

Als Parameter t führen wir die Linienlängen σ ein:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \sigma_1 = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a_1} \cdot w \\ \dfrac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{b_1} \cdot v \end{array}\right. \\ t_2 = \sigma_2 = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{a_3} \cdot (w - a_1) \\ \dfrac{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{b_3} (v - b_1) \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad . \; . \; 50)$$

$$t_3 = \sigma_3 = \begin{cases} \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a_1} \cdot (w - a_3) \\ \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{b_1} \cdot (v - b_3) \end{cases}$$

$$t_4 = \sigma_4 = \begin{cases} \frac{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{a_3} \cdot w \\ \frac{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{b_3} \cdot v \end{cases} \quad \Big\} \quad . \quad . \quad 50\,a)$$

Da die Begrenzung der Haut einen Rhombus bildet, so bestehen die Gleichungen:

$$b_2 = b_3 + b_1 \qquad a_2 = a_3 + a_1$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}.$$

Die Parameterwerte τ_i, T_i, welche dem Anfangspunkt und dem Endpunkt einer Rhombusseite entsprechen, besitzen folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \{t_1\}_{\substack{w=0 \\ v=0}} = 0 \qquad \tau_3 = \{t_3\}_{\substack{w=a_2 \\ v=b_2}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ \tau_2 &= \{t_2\}_{\substack{w=a_1 \\ v=b_1}} = 0 \qquad \tau_4 = \{t_4\}_{\substack{w=a_3 \\ v=b_3}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 51)$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \{t_1\}_{\substack{w=a_1 \\ v=b_1}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \qquad T_3 = \{t_3\}_{\substack{w=a_2 \\ v=b_2}} = 0 \\ T_2 &= \{t_2\}_{\substack{w=a_2 \\ v=b_2}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \qquad T_4 = \{t_4\}_{\substack{w=0 \\ v=0}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad 52)$$

Auf die Haut mögen folgende Umfangskräfte wirken:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = p_1 . \quad X_2 = p_2 . \quad X_3 = -p_3 = -p_1 . \quad X_4 = -p_4 = -p_2 \\ Y_1 = q_1 \qquad Y_2 = q_2 \qquad Y_3 = -q_3 \qquad Y_4 = -q_4 \end{aligned}\right\} \quad 53)$$

Damit das gesamte Kräftepolygon geschlossen ist, müssen die 2 Gleichungen bestehen:

$$\int_{\tau_1}^{T_1} X_1 \cdot d\,t_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} X_2 \cdot d\,t_2 + \int_{\tau_3}^{T_3} \{-X_3\}\, d\,t_3 + \int_{\tau_4}^{T_4} \{-X_4\} \cdot d\,t_4 = 0.$$

$$\int_{\tau_1}^{T_1} Y_1 \cdot d\,t_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} Y_2 \cdot d\,t_2 + \int_{\tau_3}^{T_3} \{-Y_3\} \cdot d\,t_3 + \int_{\tau_4}^{T_4} \{-Y_4\} \cdot d\,t_4 = 0.$$

Dieselben können wir mit Berücksichtigung der Gleichungen (51), (52), (53) auch schreiben:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \{p_1 + p_2 - p_1 - p_2\} = 0.$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \{q_1 + q_2 - q_3 - q_4\} = 0.$$

Erstere Gleichung ist von selbst erfüllt, letztere sagt aus, dass nur 3 von den Grössen q_i willkürlich gewählt werden dürfen.

Aus Fig. 14 ist ersichtlich, dass die w-Kurven in den Gebieten AED, EBGD, BCG verschiedener Art sind, und dass sich auch die v-Kurven entsprechend den Gebieten ABF, AFCH, HCD aus 3 Teilen zusammensetzen.

Für die Kurven $w = \text{const.}$ bezw. $v = \text{const.}$ können wir auf Grund ähnlicher Dreiecke folgende Formeln aufstellen:

1. Gebiet ABF; $v = 0$ bis $v = b_1$.

$$\cos \mu(v) \cdot dv = d_1\xi_v = -k_1 \cdot \left\{ \int_{t_1}^{T_1} p_1 \cdot dt_1 + \int_{\tau_2}^{t_2} p_2 \cdot dt_2 \right\},$$

$$\sin \mu(v) \cdot dv = d_1\eta_v = k_1 \cdot \left\{ \int_{t_1}^{T_1} q_1 \cdot dt_1 + \int_{\tau_2}^{t_2} q_2 \cdot dt_2 \right\}.$$

2. Gebiet AFCH; $v = 0$ bis $v = b_2$.

$$\cos \mu(v) \cdot dv = d_2\xi_v = -k_2 \cdot \left\{ \int_{\tau_1}^{T_1} p_1 \cdot dt_1 + \int_{\tau_2}^{t_2} p_2 \cdot dt_2 - \int_{T_4}^{t_4} p_4 \cdot dt_4 \right\},$$

$$\sin \mu(v) \cdot dv = d_2\eta_v = k_2 \cdot \left\{ \int_{\tau_1}^{T_1} q_1 \cdot dt_1 + \int_{\tau_2}^{t_2} q_2 \cdot dt_2 - \int_{T_4}^{t_4} q_4 \cdot dt_4 \right\}.$$

3. Gebiet HCD, $b_2 < v < b_3$.

$$\cos \mu(v) \cdot dv = d_3\xi_v = -k_3 \cdot \left\{ \int_{t_4}^{\tau_4} p_4 \cdot dt_4 + \int_{T_3}^{t_3} p_3 \cdot dt_3 \right\},$$

$$\sin \mu(v) \cdot dv = d_3\eta_v = k_3 \cdot \left\{ \int_{t_4}^{\tau_4} q_4 \cdot dt_4 + \int_{T_3}^{t_3} q_3 \cdot dt_3 \right\}.$$

4. Teil AED; $0 < w < a_1$.

$$\cos \lambda(w) \cdot dw = d_1\xi_w = \nu_1 \cdot \left\{ \int_{T_4}^{t_4} p_4 \cdot dt_4 - \int_{\tau_1}^{t_1} p_1 \cdot dt_1 \right\},$$

$$\sin \lambda(w) \cdot dw = d_1\eta_w = -\nu_1 \left\{ \int_{T_4}^{t_4} q_4 \cdot dt_4 - \int_{\tau_1}^{t_1} q_1 \cdot dt_1 \right\}.$$

5. Teil EBGD; $a_3 < w < a_1$.

$$\cos \lambda(w) \cdot dw = d_2\xi_w = \nu_2 \cdot \left\{ \int_{T_4}^{\tau_4} p_4 \cdot dt_4 + \int_{T_3}^{t_3} p_3 \cdot dt_3 - \int_{\tau_1}^{t_1} p_1 \cdot dt_1 \right\},$$

$$\sin \lambda(w) \cdot dw = d_2\eta_w = -\nu_2 \cdot \left\{ \int_{T_4}^{\tau_4} q_4 \cdot dt_4 + \int_{T_3}^{t_3} q_3 \cdot dt_3 - \int_{\tau_1}^{t_1} q_1 \cdot dt_1 \right\}.$$

6. Teil BCG; $a_1 < w < a_2$.

$$\cos\lambda(w)\cdot dw = d_3\xi_w = \nu_3\cdot\left\{\int_{t_2}^{T_2} p_2\cdot dt_2 + \int_{\tau_3}^{t_3} p_3\cdot dt_3\right\},$$

$$\sin\lambda(w)\cdot dw = d_3\eta_w = -\nu_3\cdot\left\{\int_{t_2}^{T_2} q_2\cdot dt_2 + \int_{\tau_3}^{t_3} q_3\cdot dt_3\right\}.$$

Bei Auswertung der Integrale wird man t_i durch v oder durch w nach den Gleichungen (50) ausdrücken, je nachdem es sich um die Formeln für $d\xi_v$, $d\eta_v$ oder $d\xi_w$, $d\eta_w$ handelt. Berücksichtigen wir dabei die Gleichungen (51) (52), so gelangen wir nach einigen Umformungen zu den Ausdrücken:

1. $b_1 < v < 0$

$$\left.\begin{aligned} -d_1\xi_v &= \frac{-\frac{p_1}{b_1}+\frac{p_2}{b_3}}{\sqrt{\left\{-\frac{p_1}{b_1}+\frac{p_2}{b_3}\right\}^2+\left\{-\frac{q_1}{b_1}+\frac{q_2}{b_3}\right\}^2}}\cdot dv \\ &= \frac{-p_1\cdot b_3+p_2\cdot b_1}{\sqrt{\{-p_1 b_3+p_2 b_1\}^2+\{-b_3 q_1+q_2 b_1\}^2}}\,dv \equiv \frac{-M\cdot dv}{\sqrt{M^2+N^2}} \\ d_1\eta_v &= \frac{-b_3\cdot q_1+q_2\cdot b_1}{\sqrt{\{-p_1 b_3+p_2 b_1\}^2+\{-b_3 q_1+q_2\cdot b_1\}^2}}\cdot dv \equiv \\ &\equiv \frac{-N\cdot dv}{\sqrt{M^2+N^2}} \end{aligned}\right\} 54)$$

2. $0 < v < b_2$.

$$\left.\begin{aligned} -d_2\xi_v &= \frac{p_1-\frac{b_1}{b_3}\cdot p_2}{\sqrt{\left\{p_1-\frac{b_1}{b_3}\cdot p_2\right\}^2+\left\{q_1-\frac{b_1}{b_3}q_2+v\cdot\frac{q_2-q_4}{b_3}\right\}^2}}\,dv \\ &= \frac{p_1\cdot b_3-b_1\cdot p_2}{\sqrt{\{p_1 b_3-b_1 p_2\}^2+\{q_1 b_3-b_1 q_2+v(q_2-q_4)\}^2}}\cdot dv \\ &\equiv \frac{+M\cdot dv}{\sqrt{M^2+\{N-Lv\}^2}} \\ +d_2\eta_v &= \frac{q_1\cdot b_3-b_1\cdot q_2+v(q_2-q_4)}{\sqrt{\{p_1\cdot b_3-b_1 p_2\}^2+\{q_1 b_3-b_1 q_2+v(q_2-q_4)\}^2}}\cdot dv \\ &\equiv \frac{(-Lv+N)\,dv}{\sqrt{M^2+\{N-Lv\}^2}} \end{aligned}\right\} 55)$$

3. $b_2 < v < b_3$.

$$\left.\begin{aligned} -d_3\xi_v &= \frac{\frac{p_2}{b_3}-\frac{p_1}{b_1}}{\sqrt{\left\{\frac{p_2}{b_3}-\frac{p_1}{b_1}\right\}^2+\left\{\frac{q_4}{b_3}-\frac{q_3}{b_1}\right\}^2}}\cdot dv \\ &= \frac{p_2 b_1 - p_1 \cdot b_3}{\sqrt{\{p_2 b_1 - p_1 b_3\}^2+\{q_4 b_1 - q_3 b_3\}^2}}\cdot dv \equiv \frac{-M\cdot dv}{\sqrt{M^2+K^2}} \\ d_3\eta_v &= \frac{q_4 b_1 - q_3\cdot b_3}{\sqrt{\{p_2 b_1 - p_1 b_3\}^2+\{q_1 b_1 - q_3 b_3\}^2}} \equiv \frac{-K\cdot dv}{\sqrt{M^2+K^2}} \end{aligned}\right\} 56)$$

4. $0 < w < a_3$.

$$\left.\begin{aligned} d_1\xi_w &= \frac{\frac{p_2}{a_3}-\frac{p_1}{a_1}}{\sqrt{\left\{\frac{p_2}{a_3}-\frac{p_1}{a_1}\right\}^2+\left\{\frac{q_4}{a_3}-\frac{q_1}{a_1}\right\}^2}}\cdot dw \\ &= \frac{p_2 a_1 - p_1 a_3}{\sqrt{\{p_2 a_1 - p_1 a_3\}^2+\{q_4 a_1 - q_1 a_3\}^2}}\cdot dw \equiv \frac{P\cdot dw}{\sqrt{P^2+Q^2}} \\ -d_1\eta_w &= \frac{q_4 a_1 - q_1 a_3}{\sqrt{\{p_2 a_1 - p_1 a_3\}^2+\{q_4 a_1 - q_1 a_3\}^2}}\cdot dw \equiv \frac{Q\cdot dw}{\sqrt{P^2+Q^2}} \end{aligned}\right\} 57)$$

5. $a_3 < w < a_1$.

$$\left.\begin{aligned} d_2\xi_w &= \frac{p_2 - p_1\cdot\frac{a_3}{a_1}}{\sqrt{\left\{p_2 - p_1\cdot\frac{a_3}{a_1}\right\}^2+\left\{q_4 - q_3\cdot\frac{a_3}{a_1}+w\,\frac{q_3-q_1}{a_1}\right\}^2}}\cdot dw \\ &= \frac{p_2 a_1 - p_1 a_3}{\sqrt{\{p_2 a_1 - p_1 a_3\}^2+\{q_4\cdot a_1 - q_3\cdot a_3 + w\,(q_3-q_1)\}^2}} \\ &\equiv \frac{P\cdot dw}{\sqrt{P^2+\{Q_1 - R\,w\}^2}} \\ -d_2\eta_w &= \frac{q_4\cdot a_1 - q_3\cdot a_3 + w\,(q_3-q_1)}{\sqrt{\{p_2 a_1 - p_1\cdot a_3\}^2+\{q_4\cdot a_1 - q_3\cdot a_3 + w\,(q_3-q_1)\}^2}}\cdot dw \\ &\equiv \frac{Q_1 - R\cdot w}{\sqrt{P^2+\{Q_1 - R\,w\}^2}}\cdot dw \end{aligned}\right\} 58)$$

6. $a_1 < w < a_2$.

$$\left.\begin{aligned} d_3\xi_w &= \frac{\frac{p_2}{a_3} - \frac{p_1}{a_1}}{\sqrt{\left\{\frac{p_2}{a_3} - \frac{p_1}{a_1}\right\}^2 + \left\{\frac{q_2}{a_3} - \frac{q_3}{a_1}\right\}^2}} \cdot d\,w \\ &= \frac{p_2 \cdot a_1 - p_1 \cdot a_3}{\sqrt{\{p_2\,a_1 - p_1\,a_3\}^2 + \{q_2\,a_1 - q_3\,a_3\}^2}} \cdot d\,w \equiv \frac{P \cdot d\,w}{\sqrt{P^2 + Q_2{}^2}} \\ -d_3\eta_w &= \frac{q_2 \cdot a_1 - q_3 \cdot a_3}{\sqrt{\{p_2\,a_1 - p_1 \cdot a_3\}^2 + \{q_2\,a_1 - q_3\,a_3\}^2}} \cdot d\,w \\ &\equiv \frac{Q_2 \cdot d\,w}{\sqrt{P^2 + Q_2{}^2}} \end{aligned}\right\} 59)$$

Wir erkennen aus den Formeln (54) bis (59), dass sich die w-Kurven des 4. und 6. Gebiets, sowie die v-Kurven des 1. und 3. Teiles in gerade Linien einstellen, deren Neigungswinkel durch:

$$\operatorname{tg}\gamma_v = \frac{d\,\eta_v}{d\,\xi_v} \quad \text{bezw.} \quad \operatorname{tg}\gamma_w = \frac{d\,\eta_w}{d\,\xi_w}$$

gegeben sind, und dass im 2. bezw. 5. Gebiete die v- bezw. w-Kurven Kettenlinien sind, welche beide eine Parallele zur η-Axe als Symmetrieaxe besitzen.

In den Punkten $v = 0$, — d. h. längs der w-Axe — in denen die v-Kurven des 1. und 2. Gebietes zusammenstossen, haben beide Kurven dieselbe Tangente, da für $v = 0$ nach den Gleichungen (54), (55) $\frac{d_2\,\eta_v}{d_2\,\xi_v} = \frac{d_1\,\eta_v}{d_1\,\xi_v}$ ist. Ebenso tangiren die v-Linien des 3. Gebietes in den Punkten $v = b_2$ an die v-Kurven des 2. Gebietes, weil:

$$(-L \cdot v + N)_{v=b_2} = K,$$

also auch $\frac{d_2\,\eta_v}{d_2\,\xi_v} = \frac{d_3\,\eta_v}{d_3\,\xi_v}$ ist.

Die Tangenten an die w-Kurven des 2. Gebietes in den Punkten $w = a_3$ haben die Richtung der w-Linien des 1. Gebietes, indem:

$$\{Q_1 - R\,w\}_{w=a_3} = Q;$$

und die w-Kurven des 2. und 3. Gebietes haben in den Punkten $w = a_1$ dieselben Tangenten, da

$$\{Q_1 - R\,w\}_{w=a_1} = Q_2$$

ergiebt.

Denken wir uns die drei Teile der v- bezw. w-Kurve nach Verschiebung parallel mit sich selbst so an einander gefügt, dass der Punkt $v=0$ bezw. $w=0$ mit dem Punkte $\xi=0$, $\eta=0$ zusammenfällt, so können wir für die verschiedenen Teile dieser v- resp. w-Axe leicht ihre Gleichungen aufstellen; z. B.

1. $0<v<b_2$.

$$ {}_1\xi_v = \int_0^v d\, {}_2\xi_v = -\frac{M}{L} \lg \frac{\sqrt{M^2+(-Lv+N)^2}+Lv-N}{\sqrt{M^2+N^2}-N} $$

$$ {}_2\eta_v = \int_0^v d\, {}_2\eta_v = -\frac{1}{L}\left\{\sqrt{M^2+(-Lv+N)^2}-\sqrt{M^2+N^2}\right\} $$

2. $0<w<a_3$.

$$ {}_1\xi_w = \int_0^w d\, {}_1\xi_w = \frac{P\cdot w}{\sqrt{P^2+Q^2}} \equiv \Psi_1(w) $$

$$ {}_1\eta_w = \int_0^w d\, {}_1\eta_w = \frac{-Q\cdot w}{\sqrt{P^2+Q^2}} \equiv X_1(w) $$

$a_3<w<a_1$.

$$ {}_2\xi_w = \{\Psi_1(w)\}_{w=a_3} + \int_0^{w-a_3} d\, {}_2\xi_w = $$

$$ = \{\Psi_1(w)\}_{w=a_3} + \frac{P}{R}\cdot \lg \frac{\sqrt{P^2+\{-Q_1+R(w-a_3)\}^2}-Q_1+R(w-a_3)}{\sqrt{P^2+Q_1{}^2}-Q_1} $$

$$ {}_2\eta_w = \{X(w)\}_{w=a_3} + \int_0^{w-a_3} d\, {}_2\eta_w = $$

$$ = \{X_1(w)\}_{w=a_3} + \frac{1}{R}\left\{\sqrt{P^2+\{-Q_1+R(w-a_3)\}^2}-\sqrt{P^2+Q_1{}^2}\right\} $$

Um die Koordinaten ξ, η eines beliebigen Punktes der deformirten Haut zu erhalten, haben wir in dem betreffenden Gebiet $(\xi_v+\xi_w)$ bezw. $(\eta_v+\eta_w)$ zu bilden.

Jede Rhombusseite wird sich nach der Deformation aus zwei Kurven zusammensetzen. Die Gleichung einer solchen Kurve findet man, indem man in den Werten ξ, η, die sich auf einen Punkt desjenigen Gebietes beziehen, welchem die betreffende Begrenzung angehört, die Grössen w, v mittels der Gleichungen (50) durch den Parameter dieser Begrenzung ausdrückt. Die Teile AE, BF, CG, DH sind nach der Deformation wieder gerade Linien.

Ein specieller Fall unseres Beispieles entsteht, wenn $q_1=q_3$ und $q_2=q_4$ ist; dann stellen sich auch die v-Linien des 2. Gebietes und die w-Linien des 5. Gebietes in gerade Linien ein, da in den Ausdrücken (55) (58) die Grösse L bezw. R verschwindet.

7. Die Differentialgleichungen der Deformationskurven bei gegebenen äusseren Kräften und ihr Zusammenhang mit den Gleichungen der Seilkurve.

Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, dass die Gleichungen der Kurven $w = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, in welche die geraden Linien unter Einwirkung von Kräften am Umfang der Haut übergehen, mittels Quadraturen gefunden werden können. Wir wollen nun im Folgenden Differentialgleichungen für dieses Problem aufstellen, und zwar speciell für die rechteckig begrenzte Haut. Diese Differentialgleichungen können allerdings sofort durch Quadraturen gelöst werden, jedoch bieten sie insofern besonderes Interesse, als sie einen engen Zusammenhang mit den Differentialgleichungen der Seilkurve aufweisen (vgl. S. 17).

Wir gehen von den Gleichungen (vgl. Gleichung (28)) aus:

$$d\xi_w = k_1 (x_u - x_o), \qquad d\eta_w = -k_1 \cdot (y_u - y_o),$$

wobei ξ_w, η_w die Koordinaten eines beliebigen Punktes der w-Kurve angeben, und:

$$\left.\begin{aligned} x_u - x_o &= C + \int_0^w (-X_u - X_o)\, dw \\ y_u - y_o &= C_1 + \int_0^w (-Y_u - Y_o)\, dw \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 60)$$

Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte x_u, y_u und x_o, y_o mit S, so können wir die Beziehungen anschreiben (Fig. 15):

$$dw = \sqrt{d\xi_w^2 + d\eta_w^2} = k_1 \cdot \sqrt{(x_u - x_o)^2 + (y_u - y_o)^2} = k_1 \cdot S$$

und wir erhalten:

$$S \cdot \frac{d\xi_w}{dw} = x_u - x_o \qquad S \cdot \frac{d\eta_w}{dw} = -(y_u - y_o).$$

Bei nochmaligem Differentiiren gelangen wir mit Berücksichtigung der Gleichungen (60) zu den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}\left(S \cdot \frac{d\xi_w}{dw}\right) &= -X_u - X_o \\ \frac{d}{dw}\left(S \cdot \frac{d\eta_w}{dw}\right) &= Y_u + Y_o \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 61)$$

Entsprechende Gleichungen bestehen für die v-Kurven:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dv}\left(T\cdot\frac{d\xi_v}{dv}\right) &= -X_r - X_l \\ \frac{d}{dv}\left(T\cdot\frac{d\eta_v}{dv}\right) &= Y_r + Y_l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 62)$$

wobei T die Entfernung der Punkte x_r, y_r und x_l, y_l angiebt. Unabhängige Variable ist in diesen Gleichungen der Parameter w bezw. v, d. i. die Bogenlänge der betreffenden Kurve. Die Kräfte X_o, Y_o, X_u, Y_u sind Funktionen nur von w, die Kräfte mit den Indices r, l nur solche von v.

Die Kraftkomponenten müssen die Bedingungen erfüllen:

$$\int_0^{l_v} -(X_l + X_r)\,dv = \int_0^{l_w} (X_u + X_o)\,dw,$$

$$\int_0^{l_v} -(Y_l + Y_r)\,dv = \int_0^{l_w} (Y_u + Y_o)\,dw,$$

wenn l_v, l_w die Länge der Hautseiten angiebt. Sind die Kräfte gegeben, so sind ξ_w, η_w bezw. ξ_v, η_v die abhängigen Variabelen, und die Form der Kurven $w = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ kann ermittelt werden. Umgekehrt: sind die Kurven gegeben, so können die Summen der Kraftkomponenten aus diesen Gleichungen berechnet werden. Die Komponenten von S sind durch die Kräfte X_u, Y_u, X_o, Y_o bis auf eine Konstante bestimmt und ebenso diejenigen von T durch die Kräfte X_l, Y_l, X_r, Y_r. Ganz entsprechend ist auch die Spannung T der Seilkurve durch die Kraftkomponenten X, Y bis auf eine Konstante in jeder ihrer Komponenten bestimmt.

Dieser enge Zusammenhang in den Gleichungen der Seilkurve und der Deformationskurven $w = \text{const.}$ bezw. $v = \text{const.}$ tritt noch mehr hervor, wenn nicht alle äusseren Kräfte, sondern etwa die Kräfte P_o, P_l gegeben sind mit der Bedingung, dass die Gespinnstlinien durch zwei feste Punkte hindurchgehen, wie wir dies bei dem Beispiel unter No. 4 annahmen. Es bestehen die Beziehungen:

$$d\xi_w = k_1 \cdot \{g - \int_0^w X_o\,dw\} \qquad -d\eta_w = k_1 \cdot \{h - \int_0^w Y_o \cdot dw\},$$

wenn g, h die Koordinaten des festen Punktes M sind (Fig. 16). Die Entfernung des Punktes x_o, y_o vom Punkte M bezeichnen wir mit S_1 und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}\left(S_1 \cdot \frac{d\xi_w}{dw}\right) &= -X_0 \\ \frac{d}{dw}\left(S_1 \cdot \frac{d\eta_w}{dw}\right) &= Y_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 63)$$

Die Gleichungen der Kurven $w = \text{const.}$ lauten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dv}\left(T_1 \cdot \frac{d\xi_v}{dv}\right) &= -X_1 \\ \frac{d}{dv}\left(T_1 \cdot \frac{d\eta_v}{dv}\right) &= Y_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 64)$$

wobei T_1 die Entfernung des Punktes x_1, y_1 vom Punkte N angiebt.

In diesem Fall ist S_1 (T_1) durch die Kräfte X_0, Y_0 (X_1, Y_1) bis auf eine Konstante in seinen Komponenten bestimmt. Gerade wie hier S_1 der Radius der Kräftekurve O, bezogen auf den Punkt M als Mittelpunkt ist, so ist die Spannung T im Kräfteplan, der zur Seilkurve gehört, der Radius der Kräftekurve bezogen auf den „Pol".

Zu beachten ist natürlich, dass in unserem Fall die Kräftekurven O und L in ihrer Lage nicht völlig unabhängig von einander sind. Der Punkt mit den Koordinaten: $(x_0)_{w=0}$, $(y_0)_{w=0}$ fällt zusammen mit $(x_1)_{v=0}$, $(y_1)_{v=0}$, und die Verbindungslinie dieses Punktes A mit dem Endpunkt von O fällt in die Linie T_1 durch A und diejenige mit dem Endpunkt von L in die Linie S_1 durch A. Von den Formeln (63), (64) wollen wir eine Anwendung auf ein einfaches Beispiel machen, bei welchem gerade diese Gleichungen schneller zum Ziele führen, als wenn wir mittels Quadraturen rechnen.

Die Kraftkomponenten besitzen die Werte:

$$Y_0 = m \qquad X_0 = 0$$
$$-X_1 = q \qquad Y_1 = 0$$

Die Gespinnstlinien T_1 mögen durch einen festen Punkt 0, h auf der Linie der P_0 gehen und die Linien S_1 durch den Punkt $(g_1, 0)$ (vgl. Fig. 17). Nach den Gleichungen (63) erhalten wir:

$$S_1 \cdot \frac{d\xi_w}{dw} = c$$

$$\frac{d}{dw}\left(S_1 \cdot \frac{d\eta_w}{dw}\right) = m.$$

Den Wert für S_1 aus der ersten Gleichung setzen wir in die zweite ein:

$$\frac{d}{dw}\left(c \cdot \frac{d\eta_w}{d\xi_w}\right) = m,$$

multipliciren mit dw und dividiren durch $d\xi_w$:

$$c \cdot \frac{d^2\eta_w}{d\xi_w^2} = m \cdot \frac{dw}{d\xi_w}.$$

Das ist die Differentialgleichung einer Kettenlinie; das Integral lautet:

$$\eta_w = \frac{c}{2m}\left\{C \cdot e^{\frac{m}{c} \cdot \xi_w} + \frac{1}{C} \cdot e^{-\frac{m}{c} \cdot \xi_w}\right\} + C'.$$

Die Konstante c ist nichts anderes wie g_1, da ja:

$$S_1 \cdot \frac{d\xi_w}{dw} = g_1 \text{ ist.}$$

Die Konstanten C, C′ wollen wir speciell für die Kurve $v = 0$ bestimmen. Bei der Lage unseres Koordinatensystems muss für $\xi_w = 0$ auch $\eta_w = 0$ sein, und da die Kräftekurve L horizontal verläuft, muss für $\xi_w = 0$ auch $\frac{d\eta_w}{d\xi_w} = 0$ sein.

Letztere Bedingung liefert: $C = 1$

und erstere: $C' = -\frac{g_1}{m}$.

Die Randkurve w hat demnach die Gleichung:

$$\eta_w = \frac{g_1}{2m}\left\{e^{\frac{m}{g_1} \cdot \xi_w} + e^{-\frac{m}{g_1} \cdot \xi_w}\right\} - \frac{g_1}{m}.$$

Die Kurve $w = 0$ ist durch die Gleichung dargestellt:

$$\xi_v = \frac{h}{2q}\left\{e^{\frac{q}{h} \cdot \eta_v} + e^{-\frac{q}{h} \cdot \eta_v}\right\} - \frac{h}{q}.$$

8. Bestimmung der Spannungen σ_v, σ_w für die rechteckig begrenzte und beliebig begrenzte Haut.

Um die Spannungen σ_v, σ_w für eine Haut zu erhalten, müssen wir (nach S. 16) die Spannungen ΔS_v, ΔS_w bestimmen, die in den Maschenseiten eines Netzes mit unendlich kleinen Maschen herrschen. Wir betrachten zunächst die rechteckig begrenzte Haut und nehmen die Kräfte in der früher definirten Form an:

$$X_0 = f_0(w) \qquad X_1 = f_1(v)$$
$$Y_0 = \varphi_0(w) \qquad Y_1 = \varphi_1(v) \ \ldots$$

Es sind die Strecken E Z und E F des Gespinnstes zu berechnen, welche uns die Spannungen ΔS_v, ΔS_w ausdrücken (Fig. 8). Die Koordinaten von S (bezw. T) bezeichnen wir mit x_1, y_1 (x_r, y_r), dann besitzen diejenigen von S' (T') die Werte $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$ (bezw. $x_r + dx_r$, $y_r + dy_r$). Die Komponenten von $\overline{S\,T}$ mögen r, s genannt werden, diejenigen von $\overline{G\,H}$: u, t; demnach haben die Komponenten von $\overline{S'\,T'}$ die Grössen $r + dr$, $s + ds$.

Nach analytischer Durchführung findet sich für ΔS_w der Ausdruck:

$$\Delta S_w = \left\{ \frac{y_r + dy_r}{r + dr} - \left\{ x_1 + dx_1 - \frac{s + ds}{r + dr}(y_1 + dy_1) + \frac{t}{u} \cdot y_0 - x_0 \right\} \frac{u}{t(r + dr) - u(s + ds)} + \frac{r \cdot f_r - s \cdot \varphi_r}{r(\varphi_1 + \varphi_r) - r(f_1 + f_r)} \right\} \propto$$

$$\propto \frac{s(\varphi_1 + \varphi_r) - r(f_1 + f_r)}{r \cdot t - s \cdot u} \cdot \sqrt{u^2 + t^2} \cdot dv$$

und ein entsprechend gebauter Ausdruck für ΔS_v. Wenn wir nun zur Haut übergehen und bedenken, dass die kleinen Grössen d y, d x, . . gegenüber den beistehenden Summanden y, x, r . . vernachlässigt werden können, und wenn wir für t, u . . ihre Werte $(x_u - x_0)$, $(y_u - y_0)$ . . einsetzen, so erhalten wir für die specifischen Spannungen die Werte:

$$\sigma_w \left\{ \frac{y_r}{y_r - y_1} \cdot \left(x_1 - \frac{x_r - x_1}{y_r - y_1} \cdot y_1 + \frac{x_u - x_0}{y_u - y_0} \cdot y_0 - x_0 \right) \frac{y_u - y_0}{(x_u - x_0)(y_r - y_1) - (x_r - x_1)(y_u - y_0)} + \frac{(y_r - y_1) f_r - (x_r - x_1) \cdot \varphi_r}{(x_r - x_1)(\varphi_r + \varphi_1) - (y_r - y_1)(f_r + f_1)} \right\} \propto$$

$$\propto \frac{(x_r - x_1)(\varphi_r + \varphi_1) \quad (y_r - y_1) \cdot (f_r + f_1)}{(x_u - x_0)(y_r - y_1) - (x_r - x_1) \cdot (y_u - y_0)} \cdot \sqrt{(y_u - y_0)^2 + (x_u - x_0)^2} \ . \ . \ . \ . \ . \quad 65)$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_u \\ x_o \end{matrix} - \left(y_o - \frac{y_u - y_o}{x_u - x_o} \cdot x_o + \frac{y_r - y_l}{x_r - x_l} \cdot x_l - y_l \right) \cdot \frac{x_r - x_l}{(x_u - x_o)(y_r - y_l) - (x_r - x_l)(y_u - y_o)} + \frac{(y_u - y_o) \cdot f_u - (x_u - x_o) \cdot \varphi_u}{(x_u - x_o)(\varphi_u + \varphi_o) - (y_u - y_o)(f_o + f_u)} \right\} \times$$

$$\times \frac{(y_u - y_o)(f_o + f_u) - (x_u - x_o)(\varphi_o + \varphi_u)}{(x_u - x_o)(y_r - y_l) - (x_r - x_l)(y_u - y_o)} \cdot \sqrt{(y_r - y_l)^2 + (x_r - x_l)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66)$$

Alle in diesen Ausdrücken vorkommenden Grössen sind bekannt, sobald die äusseren Kräfte gegeben sind. Die Ausdrücke mit den Indices r, l sind nur Funktionen von v, diejenigen mit den Indices o, u nur Funktionen von w. Die Komponenten der Spannungen σ_v, σ_w sind durch die Formeln gegeben:

$$_x\sigma_w = \sigma_w \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + u^2}} = \sigma_w \cdot \cos \lambda(w)$$

$$_y\sigma_w = \sigma_w \cdot \frac{u}{\sqrt{t^2 + u^2}} = -\sigma_w \cdot \sin \lambda(w).$$

$$_x\sigma_v = \sigma_v \cdot \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} = -\sigma_v \cdot \cos \mu(v),$$

$$_y\sigma_v = \sigma_v \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \sigma_v \cdot \sin \mu(v).$$

Besondere Bemerkungen sind bezüglich der Randspannungen hinzuzufügen. Wir betrachten zu diesem Zweck das in Fig. 18 dargestellte Beispiel einer quadratischen Haut, bezw. eines Netzes. Die wirkenden Kräfte P sind alle konstant $P = q$ und sie sind stets von dem Mittelpunkt fortgerichtet; in diesem Falle sind die Kräftekurven kongruente Kettenlinien; die Haut erleidet überhaupt keine Deformation. Die specifischen Spannungen finden sich sofort:

$$\sigma_v = \frac{\Delta S_v}{d\,w} = \frac{h}{\sqrt{(h - w)^2 + h^2}} \cdot q \qquad \sigma_w = \frac{\Delta S_w}{d\,v} = \frac{h}{\sqrt{(h - v)^2 + h^2}} \cdot q.$$

In diesem Falle ist $\sigma_v = \sigma'_v$ und $\sigma_w = \sigma'_w$.

Wie wir aus dem Gespinnst erkennen, wirkt nun längs der Kurve $v = 0$ eine Spannung von der Grösse:

$$_o\sigma_\varrho \cdot d\,v = q \cdot d\,v \left\{ \frac{h}{\sqrt{(h - v)^2 + h^2}} \right\}_{v=0} + q \cdot \int_o^w \frac{h - w}{\sqrt{(h - w)^2 + h^2}} \cdot d\,w,$$

$$_o\sigma_\varrho \cdot d\,v = \frac{q}{\sqrt{2}} \cdot d\,v + q \left\{ h\sqrt{2} - \sqrt{(w - h)^2 + h^2} \right\}.$$

Die erste Grösse liefert eine specifische Spannung $\frac{q}{\sqrt{2}}$ und diese wird von der Haut aufgenommen; dagegen die Kraft: $q\{h\sqrt{2}-\sqrt{(w-h)^2+h^2}\}\equiv T$ kann nicht von der Haut übertragen werden; es ergiebt ja diese Kraft eine unendlich grosse specifische Beanspruchung. Würde keine besondere Massregel getroffen, so müsste infolge von T die Haut am oberen Rande reissen; diese Kraft T muss von einem Seil aufgenommen werden, das längs des oberen Randes der Haut geführt wird. Die Stärke desselben kann mittels der Formel: $F=\frac{T}{K}$ — d. h. die Querschnittsfläche des Seiles ist gleich der wirkenden Kraft T, dividirt durch die zulässige Beanspruchung, welch' letztere als bekannt anzusehen ist — berechnet werden. Dasselbe gilt natürlich von den anderen Randbegrenzungen der vorliegenden Haut. Die specifische Spannung $\frac{q}{\sqrt{2}}$ würde allein auftreten, wenn die Kräftekurven O, R, U, L gerade Linien statt Kettenlinien wären.

Wir erkennen ganz allgemein: dass die Kräftekurven O, R, U, L beliebig verändert werden dürfen, — solange nur die Kurven durch die Eckpunkte A, B, C, D des Gespinnstes gehen — ohne dass sich dadurch die Spannungen im Inneren der Haut ändern; dagegen erhalten die Randspannungen andere Werte. Sind die Kräftekurven gerade Linien, so tritt längs des Randes eine Spannung auf von der Grösse:

für die obere Begrenzung: ${}_{o}\sigma_{\varrho}=\{\sigma_w\}_{v=o}$
für die untere Begrenzung: ${}_{u}\sigma_{\varrho}=\{\sigma_w\}_{v=l_v}$,
für die linke Begrenzung: ${}_{l}\sigma_{\varrho}=\{\sigma_v\}_{w=o}$
für die rechte Begrenzung: ${}_{r}\sigma_{\varrho}=\{\sigma_v\}_{w=l_w}$.

Haben wir wirkliche Kräftekurven, so tritt ausser diesen Spannungen noch eine unendlich grosse specifische Spannung $\frac{T}{dv}$ auf. Die Grösse T finden wir z. B. für den oberen Rand (Fig. 8), indem wir die Ordinate y_s des Schnittpunktes K der Linien A B und G H bestimmen, davon den Wert y_o — d. i. die Ordinate des Punktes G — abziehen und die Differenz durch sin b dividiren:

$$T_o=\left\{\left\{x_o-\frac{x_u-x_o}{y_u-y_o}\,y_o\right\}\frac{y_u-y_o)\cdot\int_o^{l_w}\varphi_o(w)\,dw}{(y_u-y_o)\cdot\int_o^{l_w}f_o(w)\,dw-(x_u-x_o)\int_o^{l_w}\varphi_o(w)\,dw}-y_o\right\}\cdot\frac{\sqrt{(x_u-x_o)^2+(y_u-y_o)^2}}{(y_u-y_o)}\quad 67)$$

Ein Seil ist nur längs desjenigen Randes notwendig, dessen zugehörige Kraftlinie eine eigentliche Kurve bildet. Haben wir etwa das Gespinnst der Fig. 19, so muss längs des oberen und des linken Randes der Haut ein Seil angebracht werden, dagegen nicht am unteren und rechten Rand. —

Liegt eine ganz beliebig begrenzte Haut vor, so bietet die Ermittlung der Spannungen gegenüber der rechteckig begrenzten Haut nur insofern einen Unterschied, als das Element der Kräftekurven nicht mehr durch $P\cdot dw$ oder $P\cdot dv$, sondern durch $P\cdot dt$ dargestellt ist. Man erhält beispielsweise für ΔS_w den Ausdruck:

$$\Delta S_w=\left\{1+\frac{y_1}{y_r-y_1}-\left\{x_1-\frac{x_r-x_1}{y_r-y_1}\cdot y_1+\frac{x_u-x_o}{y_u-y_o}\cdot y_o-x_o\right\}\cdot\frac{y_u-y_o}{(x_u-x_o)(y_r-y_1)-(y_u-y_o)(x_r-x_1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(y_r-y_1)f_r-(x_r-x_1)\varphi_r}{(x_r-x_1)\cdot\left(\varphi_1\cdot\frac{dt_1}{dt_r}+\varphi_r\right)-(y_r-y_1)\cdot\left(f_1\cdot\frac{dt_1}{dt_r}+f_r\right)}\right\}\times$$
$$\times\frac{(x_r-x_1)\cdot\left(\varphi_1\cdot\frac{dt_1}{dt_r}+\varphi_r\right)-(y_r-y_1)\cdot\left(f_1\cdot\frac{dt_1}{dt_r}+f_r\right)\cdot\sqrt{(x_u-x_o)^2+(y_u-y_o)^2}\cdot dt_r}{(x_u-x_o)(y_r-y_1)-(y_u-y_o)(x_r-x_1)}\quad 68)$$

Die specifische Spannung ist gegeben durch: $\sigma_w=\frac{\Delta S_w}{dv}$; um die Division ausführen zu können, werden wir dt_r durch dv ausdrücken. Es bedeuten t_1, t_r die Parameterwerte, welche denjenigen Punkten der Begrenzungskurve zugehören, in denen die Linie $v=\text{const.}$ dieselbe schneidet, und t_o, t_u diejenigen, welchen den Schnittpunkten der Linie $w=\text{const.}$ mit der Begrenzungskurve entsprechen; die Bezeichnungen φ_1, f_1 . . . sind Abkürzungen für $\varphi(t_1)$, $f(t_1)$ . . .; die Grössen x_o . . . sind durch die Ausdrücke dargestellt:

$$x_o=\int_r^{t_o}X\cdot dt\;..$$

In dem Beispiel Fig. 12, bei welchem sich die v-Kurven im oberen (unteren) Gebiete der Haut in Richtung der Kräfte P_o (P_u)

einstellen und die w-Kurven des linken (und rechten) Gebietes in Richtung von P_l (und P_r), werden in den ersteren Gebieten nur Spannungen σ_v, in den letzteren nur Spannungen σ_w auftreten, und zwar sind diese Spannungen konstant. In diesem Falle können wir die Hautflächen ausserhalb des Rechtecks ganz fortlassen und direkt von der rechteckigen Haut ausgehen, indem wir als Kräfte einführen: auf die Länge d w der oberen (bezw. unteren) Rechteckseite: $P_o \cdot d\,t_o$ ($P_u \cdot d\,t_u$) und auf d v der linken (bezw. rechten) Rechteckseite: $P_l \cdot d\,t_l$ ($P_r \cdot d\,t_r$). —

Fällt die Randbegrenzung der Haut nicht mit einer Deformationskurve zusammen, so können keine unendlich grossen specifischen Spannungen auftreten, und die äusseren Kräfte sind nicht mehr unbestimmt; eingehendere Ausführungen hierüber finden sich unter No. 11. —

Für das unter No. 4 (Fig. 9) behandelte Beispiel einer rechteckig begrenzten Haut berechnen sich die Spannungen σ_w, σ_v zu:

$$\sigma_w = \frac{\sqrt{\{h_1\sqrt{g^2+h^2}-m\,w\,h\}^2+\{g_1\sqrt{h^2+g^2}-m\,w\,g\}^2}}{\{\sqrt{g^2+h^2}\cdot\sqrt{g_1{}^2+h_1{}^2}-q\cdot v\cdot m\,w\}^2}\cdot\sqrt{g_1{}^2+h_1{}^2}\{\sqrt{g^2+h^2}-m\,w\}\cdot q \quad \ldots \quad 69)$$

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{\{h\sqrt{g_1{}^2+h_1{}^2}-q\cdot v\cdot h_1\}^2+\{g\cdot\sqrt{g_1{}^2+h_1{}^2}-q\cdot v\cdot g_1\}^2}}{\{\sqrt{g^2+h^2}\cdot\sqrt{g_1{}^2+h_1{}^2}-q\cdot v\cdot m\cdot w\}^2}\cdot\sqrt{g^2+h^2}\{\sqrt{g_1{}^2+h_1{}^2}-q\cdot v\}m \quad 70)$$

Bei dem unter No. 4 erwähnten speciellen Beispiel (Fig. 10) nehmen σ_w, σ_v die Werte an:

$$\sigma_w = \left\{1-\frac{m\cdot w}{\sqrt{g^2+h^2}}\right\}\cdot q$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{h^2+(g-q\,v)^2}{g^2+h^2}}\cdot m$$

Bilden wir mit einem solchen Wertepaar in Verbindung mit den Formeln (35), (36) bezw. (41), (42) die Gleichungen (13), so zeigt sich, dass dieselben in der That befriedigt werden.

III. Ermittlung der Spannungen σ_v, σ_w, sowie der Randspannungen und der äusseren Kräfte, soferne die Funktionen $\lambda(w)$ und $\mu(v)$ gegeben sind.

9. Bestimmung der Spannungen σ_v, σ_w auf Grund des Gespinnstes mittels Grenzüberganges.

Wir haben im I. Kapitel die Differentialgleichungen für die Spannungen σ_v, σ_w aufgestellt; in den Lösungen treten zwei willkürliche Funktionen $\psi(w)$ und $\chi(v)$ auf. Wir wollen nun deren geometrische Bedeutung ermitteln und bestimmen die Spannungen σ_v, σ_w auf anderem Wege.

Es liege ein engmaschiges deformirtes Netz vor, dessen Maschenseiten durch die Elemente dv, dw der Kurven w = const., v = const. dargestellt sind. Wir erhalten das zugehörige Gespinnst, indem wir successive Parallelen zu den Elementen d w ziehen und dieses Liniensystem mit demjenigen schneiden, das durch die Parallelen zu den Elementen d v gegeben ist; die Strecken, die diese Linien auf einander abgrenzen, sind die Spannungen in den kleinen Maschenseiten. Wir erkennen, dass bezüglich der Anordnung des Gespinnstes noch zweifache Willkür vorhanden ist, da man beide Arten von Gespinnstlinien in der Ebene beliebig verteilen kann. Die Spannungen werden eindeutig bestimmt, sobald wir in der Gespinnstebene zwei Kurven W, V angeben, an welche die den Elementen d w, d v entsprechenden Gespinnstlinien tangiren sollen; vgl. Fig. 20. Die Enveloppen der Gespinnstlinien, d. s. die Kurven W, V können wir auf verschiedene Weise darstellen. Wir wollen diese Kurven durch die Beziehungen festlegen:

$$s_v = f(v) \qquad s_w = \varphi(w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 71)$$

in denen s_v bezw. s_w die Bogenlängen der Kurven V, W angeben. Die Längenelemente $d s_v$, $d s_w$ lassen sich demnach ansdrücken:

$$d s_v = f'(v) \cdot d v \qquad d s_w = \varphi'(w) \cdot d w \quad . \quad . \quad 72)$$

Mit Einführung dieser zwei willkürlich angenommenen Funktionen sind die Kurven V, W bestimmt, soferne wir noch die Angabe machen, dass einem Punkt der v- (bezw. w-) Kurve ein bestimmter Punkt der

Kurve V (W) entpricht; wir setzen fest, dass dem Punkt $v = 0$ der v-Axe ein Punkt $\begin{cases} x_v = a_v \\ y_v = b_v \end{cases}$ der V-Kurve und dem Punkt $w = 0$ der w-Axe ein Punkt $\begin{cases} x_w = a_w \\ y_w = b_w \end{cases}$ der Kurve W zugeordnet ist. Für ein deformirtes Netz können diese Kurven V, W auf graphischem Wege leicht gefunden werden; um z. B. die W-Kurve zu erhalten, ziehe ich durch a_w, b_w eine Parallele zu dem ersten Element dw_1, trage auf derselben von dem Punkte a_w, b_w die Strecke $f'(w_1) \cdot dw_1$ ab; ziehe durch diesen Punkt eine Parallele zu dw_2, trage darauf $f'(w_2) \cdot dw_2$ ab u. s. w. (vgl. z. B. Fig. 20).

Wir bestimmen zunächst die Spannungen ΔS_w, ΔS_v, die in den an einer beliebigen Stelle w, v zusammenstossenden Maschenseiten eines engmaschigen Netzes herrschen. Wir ziehen zu der Tangente an die w- bezw. v-Kurve im Punkte w, v eine parallele Tangente an die Kurve W bezw. V, die im Punkte x_w, y_w (x_v, y_v) berühren möge. Beide Tangenten schneiden sich in einem Punkte S, dessen Koordinaten Funktionen von w und v sind. Gehe ich nun auf der Linie v um dv vorwärts, also auf V um ds_v, so schneidet die neue V-Tangente die W-Tangente in einem Punkt S_1 (Fig. 20), dessen Koordinaten durch $X + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot dv$, $Y + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot dv$ gegeben sind. Die Strecke SS_1 giebt uns die Grösse der Spannung ΔS_w an; wir erhalten also für diese den Ausdruck:

$$\Delta S_w = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2} \cdot dv.$$

Entsprechend findet sich:

$$\Delta S_v = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial w}\right)^2} \cdot dw.$$

Die specifischen Spannungen σ_w, σ_v, die an einer beliebigen Stelle w, v der Haut auftreten, besitzen die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial w}\right)^2} \\ \sigma_w &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

Wir berechnen zunächst die Grössen X, Y. Die Gleichung der Tangente im Punkte x_v, y_v an die Kurve V lautet:

$$\frac{d\,x_v}{d\,y_v} = \frac{x_v - X}{y_v - Y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

wenn X, Y die laufenden Koordinaten der Tangente sind.

Nach den Bemerkungen auf Seite 48 ist:

$$x_v = a_v + \int_0^{s_v} \frac{d\,x_v}{d\,s_v} \cdot d\,s_v$$

$$y_v = b_v + \int_0^{s_v} \frac{d\,y_v}{d\,s_v} \cdot d\,s_v.$$

Da ferner die Gleichungen gelten:

$$d\,s_v = f'(v) \cdot d\,v \qquad d\,x_v = f'(v) \cdot d\,\xi_v \qquad d\,y_v = -f'(v) \cdot d\,\eta_v,$$

so können wir auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= a_v + \int_0^{v} \frac{\partial\,\xi}{\partial\,v} \cdot d\,v \cdot f'(v) \\ y_v &= b_v - \int_0^{v} \frac{\partial\,\eta}{\partial\,v} \cdot d\,v \cdot f'(v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 75)$$

(Das negative Vorzeichen tritt auf, weil die positive y-Axe der Gespinnstebene und die positive η-Axe der Netzebene nach entgegengesetzten Richtungen gehen.)

Durch diese Gleichungen 75 ist jedem Punkt ξ_v, η_v der v-Kurve des Netzes ein bestimmter Punkt x_v, y_v der V-Kurve des Gespinnstes zugeordnet. Setzen wir die Werte x_v, y_v aus 75 in die Gleichung 74 ein, so erhalten wir als Gleichung der Tangente an die V-Kurve, welche derjenigen an die v-Kurve im Punkte v parallel ist:

$$-\frac{d\,\xi_v}{d\,\eta_v} = \frac{\left\{ a_v + \int_0^{v} \frac{\partial\,\xi}{\partial\,v} \cdot d\,v \cdot f'(v) \right\} - X}{\left\{ b_v - \int_0^{v} \frac{\partial\,\eta}{\partial\,v} \cdot d\,v \cdot f'(v) \right\} - Y} \quad \ldots \quad 76)$$

Ebenso entspricht jedem Punkt ξ_w, η_w der w-Kurve ein bestimmter Punkt der W-Kurve mit den Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x_w &= a_w + \int_0^w \frac{\partial \xi}{\partial w} \cdot \varphi'(w) \cdot dw \\ y_w &= b_w - \int_0^w \frac{\partial \eta}{\partial w} \cdot \varphi'(w) \cdot dw \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 77)$$

und die Gleichung der Tangente an die W-Kurve, die derjenigen an die w-Kurve im Punkte w parallel ist, lautet:

$$-\frac{d\xi_w}{d\eta_w} = \frac{\left\{a_w + \int_0^w \frac{\partial \xi}{\partial w} \cdot \varphi'(w) \cdot dw\right\} - X}{\left\{b_w - \int_0^w \frac{\partial \eta}{\partial w} \cdot \varphi'(w) \cdot dw\right\} - Y} \quad . \quad . \quad . \quad 78)$$

Mit Benützung der Formeln S. 22 können wir die Tangentengleichungen auch in der Form schreiben:

$$-\cot \mu(v) = \frac{\left\{a_v + \int_0^v \cos \mu(v) \cdot f'(v) \cdot dv\right\} - X}{\left\{b_v - \int_0^v \sin \mu(v) \cdot f'(v) \cdot dv\right\} - Y}.$$

$$-\cot \lambda(w) = \frac{\left\{a_w + \int_0^w \cos \lambda(w) \cdot \varphi'(w) \cdot dw\right\} - X}{\left\{b_w - \int_0^w \sin \lambda(w) \cdot \varphi'(w) \cdot dw\right\} - Y}.$$

Lösen wir beide Gleichungen nach X und Y auf, so erhalten wir die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Tangenten, also unsere gesuchten Grössen; es ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} Y = &\frac{\left\{a_v + \int_0^v \cos \mu(v) \cdot f'(v) \cdot dv\right\} - \left\{a_w + \int_0^w \cos \lambda(w) \cdot \varphi'(w) \cdot dw\right\} +}{\cot \mu(v) - \cot \lambda(w)} \\ &+ \frac{\cot \mu(v) \cdot \left\{b_v - \int_0^v \sin \mu(v) \cdot f'_v \cdot dv\right\} - \cot \lambda(w) \cdot \left\{b_w - \int_0^w \sin \lambda(w) \cdot \varphi'(w) dw\right.}{\cot \mu(v) - \cot \lambda(w)} \end{aligned}\right\} 79)$$

$$X = \frac{\cot\lambda(w)\left\{a_v + \int_0^v \cos\mu(v)\cdot f'(v)\cdot dv\right\} - \cot\mu(v)\left\{a_w + \int_0^w \cos\lambda(w)\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}}{\cot\lambda(w) - \cot\mu(v)}$$
$$+ \frac{\cot\lambda(w)\cdot\cot\mu(v)\cdot\left[\left\{b_v - \int_0^v \sin\mu(v)\cdot f'(v)\cdot dv\right\} - \left\{b_w - \int_0^w \sin\lambda(w)\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\right]}{\cot\lambda(w) - \cot\mu(v)} \quad (80)$$

Für die folgenden Rechnungen bringen wir die Ausdrücke für Y, X besser in die Form:

$$Y = \frac{\left\{a_v + \int_0^v \cos\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\sin\mu\cdot\sin\lambda - \left\{a_w + \int_0^w \cos\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\cdot\sin\mu\cdot\sin\lambda}{\sin(\lambda(w) - \mu(v))}$$
$$+ \frac{\left\{b_v - \int_0^v \sin\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\cos\mu\cdot\sin\lambda - \left\{b_w - \int_0^w \sin\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\cos\lambda\cdot\sin\mu}{\sin(\lambda(w) - \mu(v))} \quad (81)$$

$$X = \frac{\left\{a_v + \int_0^v \cos\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\cos\lambda\cdot\sin\mu - \left\{a_w + \int_0^w \cos\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\sin\lambda\cdot\cos\mu}{\sin(\mu(v) - \lambda(w))}$$
$$+ \frac{\left\{b_v - \int_0^v \sin\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\cos\mu\cdot\cos\lambda - \left\{b_w - \int_0^w \sin\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\cos\mu\cdot\cos\lambda}{\sin(\mu(v) - \lambda(w))} \quad (82)$$

Durch diese Gleichungen (81), (82) ist einem bestimmten Punkt w, v des Netzes ein ganz bestimmter Punkt X, Y der Gespinnstebene zugeordnet; wir gelangen auf diese Weise zu einer Abbildung der Netzebene auf die Gespinnstebene.

Es sind nun die partiellen Ableitungen von Y, X nach v und w zu berechnen.

$$\frac{dY}{dv}\cdot\sin(\lambda(w) - \mu(v))^2 =$$
$$= \cos(\lambda - \mu)\cdot\frac{d\mu}{dv}\cdot\left[\left\{a_v + \int_0^v \cos\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\cdot\sin\lambda\cdot\sin\mu - \left\{a_w + \int_0^w \cos\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\sin\lambda\cdot\sin\mu +\right.$$
$$\left. + \left\{b_v - \int_0^v \sin\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\cos\mu\cdot\sin\lambda - \left\{b_w - \int_0^w \sin\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\cos\lambda\cdot\sin\mu\right] +$$
$$+ \sin(\lambda - \mu)\cdot\frac{d\mu}{dv}\left[\left\{a_v + \int_0^v \cos\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\sin\lambda\cdot\cos\mu - \left\{a_w + \int_0^w \cos\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\sin\lambda\cdot\cos\mu +\right.$$
$$\left. - \left\{b_v - \int_0^v \sin\mu\cdot f'(v)\cdot dv\right\}\sin\mu\cdot\sin\lambda - \left\{b_w - \int_0^w \sin\lambda\cdot\varphi'(w)\cdot dw\right\}\cos\lambda\cdot\cos\mu\right] +$$
$$+ \sin(\lambda - \mu)\cdot\left\{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\cos\mu\cdot f'(v) - \sin\mu\cdot\sin\lambda\cdot\cos\mu\cdot f'(v)\right\}.$$

Nach Benützung trigonometrischer Formeln können wir diesen Ausdruck auch schreiben:

$$\frac{\partial Y}{\partial v}\cdot\frac{\sin^2(\lambda-\mu)}{\frac{d\mu}{dv}}=\sin^2\lambda\left\{a_v+\int_0^v f'(v)\cdot\cos\mu\cdot dv\right\}-\sin^2\lambda\cdot\left\{a_w+\int_0^w\varphi'(w)\cdot\cos\lambda\cdot dw\right\}+$$

$$+\sin\lambda\cdot\cos\lambda\left\{b_v-\int_0^v f'(v)\cdot\sin\mu\cdot dv\right\}-\sin\lambda\cdot\cos\lambda\left\{b_w-\int_0^w\varphi'(w)\cdot\sin\lambda\cdot dw\right\}.$$

Wenn wir den gemeinschaftlichen Faktor $\sin\lambda$ ausscheiden und die Faktoren $\sin\lambda$, $\cos\lambda$, die bei den Integralen $\int_0^v \text{— —}\cdot dv$ auftreten, unter das Integralzeichen nehmen, — da λ eine Funktion von w ist, können wir dies thun — so erhalten wir:

$$\frac{\partial Y}{\partial v}=-\sin\lambda\cdot\frac{d\mu}{dv}\cdot\left[\frac{(a_w-a_v)\sin\lambda(w)+(b_w-b_v)\cdot\cos\lambda(w)-\int_0^v f'(v)\cdot\sin\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)\cdot dv}{\sin^2\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-\cos\lambda(w)\cdot\int_0^w\varphi'(w)\cdot\sin\lambda(w)\cdot dw+\sin\lambda(w)\cdot\int_0^w\varphi'(w)\cdot\cos\lambda(w)\cdot dw}{\sin^2\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)}\right] \quad (83)$$

Für $\frac{\partial X}{\partial v}$ und die Ableitungen von Y und X nach w ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{\partial X}{\partial v}=\cos\lambda\cdot\frac{d\mu}{dv}\cdot\left[\frac{(a_w-a_v)\cdot\sin\lambda(w)+(b_w-b_v)\cdot\cos\lambda(w)-\int_0^v f'(v)\cdot\sin\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)\cdot dv}{\sin^2\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-\cos\lambda(w)\cdot\int_0^w\varphi'(w)\cdot\sin\lambda(w)\cdot dw+\sin\lambda(w)\cdot\int_0^w\varphi'(w)\cdot\cos\lambda(w)\cdot dw}{\sin^2\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)}\right] \quad (84)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial w}=\sin\mu\cdot\frac{d\lambda}{dw}\cdot\left[\frac{(a_w-a_v)\cdot\sin\mu(v)+(b_w-b_v)\cdot\cos\mu(v)+\int_0^w\varphi'(w)\cdot\sin\left(\mu(v)-\lambda(w)\right)\cdot dw}{\sin^2\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{+\cos\mu(v)\cdot\int_0^v f'(v)\cdot\sin\mu(v)\cdot dv-\sin\mu(v)\cdot\int_0^v f'(v)\cdot\cos\mu(v)\cdot dv}{\sin^2\left(\lambda(w)-\mu(v)\right)}\right] \quad (85)$$

$$\frac{\partial X}{\partial w} = -\cos\mu \cdot \frac{d\lambda}{dw} \cdot \left[\frac{(a_w - a_v)\cdot \sin\mu(v) + (b_w - b_v)\cdot\cos\mu(v) + \int_0^w \varphi'(w)\cdot\sin(\mu(v) - \lambda(w))\cdot dw}{\sin^2(\lambda(w) - \mu(v))} - + \right.$$
$$\left. \frac{\cos\mu(v)\cdot\int_0^v f'(v)\cdot\sin\mu(v)\cdot dv - \sin\mu(v)\cdot\int_0^v f'(v)\cdot\cos\mu(w)\cdot dv}{\sin^2(\lambda(w) - \mu(v))} \right] \quad 86)$$

Die Ausdrücke $\frac{\partial Y}{\partial w}$ und $\frac{\partial X}{\partial w}$ unterscheiden sich nur dadurch, dass bei ersterem bei einer Funktion von w und v der Faktor {sin μ (v)} steht und in letzterem der Faktor {— cos μ (v)}; ebenso unterscheiden sich die Werte für $\frac{\partial Y}{\partial v}$ und $\frac{\partial X}{\partial v}$ nur dadurch, dass wir im erstèren den Faktor {— sin λ (w)}, im letzteren {cos λ (w)} haben. Dass sich ein solches Resultat ergeben musste, geht aus folgendem hervor: es ist ja, wie aus dem Gespinnst ersichtlich:

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = {}_y\sigma_w \qquad \frac{\partial Y}{\partial w} = {}_y\sigma_v$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = {}_x\sigma_w \qquad \frac{\partial X}{\partial w} = {}_x\sigma_v;$$

nach den Formeln 11 auf Seite 16 bestehen nun die Beziehungen:

$${}_x\sigma_w = \sigma_w \cdot \cos\lambda(w) \qquad {}_y\sigma_w = -\sigma_w \cdot \sin\lambda(w) \quad . \quad . \quad 87)$$

$${}_x\sigma_v = -\sigma_v \cdot \cos\mu(v) \qquad {}_y\sigma_v = \sigma_v \cdot \sin\mu(v) \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

und es finden sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial Y}{\partial w} : \sin\mu(v) = \frac{\partial X}{\partial w} : -\cos\mu(v).$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} : -\sin\lambda(w) = \frac{\partial X}{\partial v} : \cos\lambda(w).$$

Die Spannungen σ_w, σ_v können nach den Gleichungen (73) ermittelt werden; auf Grund der Formeln (87), (88) können wir aber σ_w, σ_v auch aus folgenden Ausdrücken berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_w &= \frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\cos\lambda(w)} = \frac{-\frac{\partial Y}{\partial v}}{\sin\lambda(w)} \\ \sigma_v &= \frac{-\frac{\partial X}{\partial w}}{\cos\mu(w)} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial w}}{\sin\mu(v)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 89)$$

und erhalten die Werte:

$$\sigma_w = \frac{(a_w - a_v)\sin\lambda + (b_w - b_v)\cos\lambda + \int_0^v f'(v)\cdot\sin(\mu-\lambda)\,dv - \cos\lambda\int_0^w \varphi'(w)\cdot\sin\lambda\cdot dw + \sin\lambda\int_0^w \varphi'(w)\cos\lambda\cdot dw}{\sin^2(\lambda-\mu)}\cdot\frac{d\mu}{dv}$$

$$\sigma_v = \frac{(a_w - a_v)\sin\mu + (b_w - b_v)\cos\mu + \int_0^w \varphi'(w)\cdot\sin(\mu-\lambda)\,dw + \cos\mu\int_0^v f'(v)\sin\mu\cdot dv - \sin\mu\cdot\int_0^v f'(v)\cos\mu\cdot dv}{\sin^2(\lambda-\mu)}\cdot\frac{d\lambda}{dw}$$

In diesen Ausdrücken sind $f'(v)$ und $\varphi'(w)$ willkürliche Funktionen, a_v, b_v, a_w, b_w dagegen Konstanten. Liegt etwa eine rechteckig begrenzte Haut vor und soll der Eckpunkt A des Gespinnstes (Fig. 20) mit dem Ursprung des Systems x, y zusammenfallen, so bestehen für diese Konstanten die Beziehungen:

$$b_v = -a_v\cdot\{\operatorname{tg}\mu(v)\}_{v=0}. \qquad b_w = -a_w\{\operatorname{tg}\lambda(w)\}_{w=0}.$$

---

10. Die geometrische Bedeutung der willkürlichen Funktionen $\psi(w)$, $\chi(v)$ in den Gleichungen (17), (18); singuläre Stellen der Haut und specielle Fälle der Deformation.

Vergleichen wir die Beziehungen (89) mit den Gleichungen (15), so erkennen wir, dass X die Stelle von F, und Y die Stelle von Φ vertritt; es ergiebt sich aus den Ausdrücken (19) (20) bezw. (81) (82):

$$\psi(v) = \left\{a_v + \int_0^v \cos\mu(v)\cdot f'(v)\cdot dv\right\} \operatorname{tg}\mu(v) + \left\{b_v - \int_0^v \sin\mu(v)\cdot f'(v)\,dv\right\}$$

$$= x_v \cdot \operatorname{tg}\mu(v) + y_v.$$

$$\chi(w) = \left\{a_w + \int_0^w \cos\lambda(w)\cdot\varphi'(w)\,dw\right\}\cdot \operatorname{tg}\lambda(w) + \left\{b_w - \int_0^w \sin\lambda(w)\cdot\varphi'(w)\,dw\right\}$$

$$= x_w \cdot \operatorname{tg}\lambda(w) + y_w.$$

Setzen wir diese Werte für $\psi(v)$ und $\chi(w)$ bezw. ihre Ableitungen in die Ausdrücke (21), (22) ein, so erhalten wir in der That die Werte σ_v, σ_w, wie wir sie in (90), (91) aufgestellt haben. Die geometrische Bedeutung von $\psi(v)$ und $\chi(w)$ liegt klar zu Tage: $\psi(v) = x_v \cdot \operatorname{tg}\mu(v) + y_v$, wobei x_v, y_v der Punkt der Enveloppe ist, welcher demjenigen Punkte ξ_v, η_v einer Kurve $w = \text{const.}$ entspricht, in welchem gerade die Spannung σ_v auftritt, und μ der Winkel bedeutet, den die Tangente in diesem Kurvenpunkt mit der x-Axe einschliesst. —

Es liegt die Frage nahe, warum wir gerade die Enveloppen eingeführt haben, um das Gespinnst bei gegebenen Deformationen festzulegen. Wir hätten auch das Gespinnst durch Angabe der Kräfte P_1, P_0 eindeutig fixiren können. Die Enveloppen haben den Vorzug, dass wir singuläre Stellen der Haut leicht bestimmen können.

Wir erkennen aus dem Ausdruck für σ_v und σ_w (90), (91), dass beide Spannungen unendlich werden, sobald $\lambda = \mu$ (bezw. $\lambda = \mu + 180°$) ist. Dieses zeigt uns auch die Gespinnstebene: wenn zwei Elemente der Enveloppen V und W einander parallel werden, so fallen die entsprechenden Gespinnstlinien in parallele Geraden, sie schneiden sich erst im Unendlichen, das heisst: wir haben unendlich grosse Spannungen. An denjenigen Stellen der Haut, für welche obige Beziehung gilt, tritt ein Ueberschlagen der Haut ein (vgl. Fig. 21). Die Gleichung der Ueberschlagungskurve ist durch

$$\lambda - \mu = 0$$

gegeben, bezogen auf die Axen w, v.

Ein specieller Fall ist der, dass die Haut überhaupt in eine Kurve zusammengedrängt wird (vgl. S. 14); in dem zugehörigen Gespinnst treten nur Transversalen von einer Gattung auf (vgl. S. 82 der erwähnten Abhandlung von Finsterwalder).

Bezüglich der Spannungsverhältnisse einer deformirten Haut ist noch zu beachten, dass an einzelnen Stellen der Haut Spannungen nur in der v- oder nur in der w-Richtung auftreten werden, wenn die Haut entsprechend grosse Ausdehnung hat. Es wird $\sigma_v = 0$, sobald der Zähler des Ausdrucks (91) verschwindet:

$$\left.\begin{aligned}(a_w - a_v)\sin\mu(v) + (b_w - b_v)\cos\mu(v) - \sin\mu(v)\cdot\int_0^v f'(v)\cdot\cos\mu(v)\cdot dv \\ + \cos\mu(v)\int_0^v f'(v)\cdot\sin\mu(v)\,dv + \int_0^w \sin(\mu-\lambda)\cdot\varphi'(w)\cdot dw = 0\end{aligned}\right\} 92)$$

Diesen Ausdruck können wir auch in der Form schreiben:

$$-\cot\mu(v) = \frac{\left\{a_v + \int_0^v f'(v)\cdot\cos\mu(v)\,dv\right\} - \left\{a_w + \int_0^w \varphi'(w)\cdot\cos\lambda(w)\cdot dw\right\}}{\left\{b_v - \int_0^v f'(v)\cdot\sin\mu(v)\,dv\right\} - \left\{b_w - \int_0^w \varphi'(w)\cdot\sin\lambda(w)\cdot dw\right\}}.$$

Er sagt aus, dass der Punkt x_w, y_w, welcher dem Punkte w der v-Kurve entspricht, in dem gerade σ_v verschwindet, auf der Tangente an die V-Kurve im Punkte x_v, y_v liegt, welcher durch die Beziehung:

$$x_v = a_v + \int_0^v \cos\mu(v)\cdot f'(v)\cdot dv \quad \text{und} \quad y_v = b_v - \int_0^v \sin\mu(v)\cdot f'(v)\cdot dv$$

demselben Punkte, als Punkt v der w-Kurve, zugeordnet ist; denn an die Stelle von X, Y in der allgemeinen Tangentengleichung S. 50 treten ja die Koordinaten x_w, y_w. Wir erkennen dies Resultat auch sofort, wenn wir die Werte für X und Y (81), (82) mit Benutzung obigen Ausdrucks (92) bilden; wir erhalten: $X = x_w$, $Y = y_w$.

Auf entsprechende Weise finden wir, dass das Verschwinden des Zählers von σ_w (90),

$$\left.\begin{aligned}(a_v - a_w)\sin\lambda(w) + (b_v - b_w)\cdot\cos\lambda(w) - \sin\lambda(w)\cdot\int_0^w \varphi'(w)\cdot\cos\lambda(w)\cdot dw \\ + \cos\lambda(w)\int_0^w \varphi'(w)\cdot\sin\lambda(w)\cdot dw + \int_0^w \sin(\lambda-\mu)\cdot f'(v)\cdot dv = 0\end{aligned}\right\} 93)$$

aussagt: der zu der Stelle w, v, an welcher gerade $\sigma_w = 0$ wird, zugehörige Gespinnstpunkt x_v, y_v liegt auf einer Tangente an die W-Kurve im Punkte x_w, y_w, der dieser Stelle entspricht.

Dieses Resultat lässt sich auch sofort an Handen des Gespinnstes gewinnen; schneidet z. B. eine Tangente an die V-Kurve eine Tangente an die W-Kurve auf dieser Kurve, so wird das Kräftevieneck in eine Gerade zusammengedrängt; es tritt nur eine Spannung σ_w auf (vgl. Fig. 20). Ist im Punkte v der Kurve w = const. die Spannung $\sigma_v = 0$ und im Punkte (v — dv) eine Zugspannung vorhanden, so wirkt im Punkte (v + dv) eine Druckspannung.

Die Gleichung (92) stellt uns den geometrischen Ort der Punkte dar, für welche $\sigma_v = 0$ ist, und (93) den geometrischen Ort derjenigen Punkte, an welchen $\sigma_w = 0$. Um die Integrale aus den Gleichungen zu entfernen, differentiiren wir zweimal total und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &f'(v)\cdot\cos\mu+\frac{\varphi''}{2\cdot\frac{d\mu}{dv}}\{\sin\lambda+\sin(\lambda-2\mu)\}+\\ &\Big/\left(\frac{d\mu}{dv}\right)^2\Big\{-2\cos(\lambda-2\mu)\cdot\frac{d\mu}{dv}+\sin(2\mu-\lambda)\cdot\frac{d^2\mu}{dv^2}-\sin\lambda\cdot\frac{d^2\mu}{dv^2}+\\ &+\cos(\lambda-2\mu)\cdot\frac{d\lambda}{dw}\cdot\frac{d\mu}{dv}+\cos\lambda\cdot\frac{d\lambda}{dw}\cdot\frac{d\mu}{dv}-2\cos\lambda\cdot\left(\frac{d\mu}{dv}\right)^2\Big\}=0 \end{aligned}\right\}\quad(94)$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'\cdot\cos\lambda+\frac{f''}{2\left(\frac{d\lambda}{dw}\right)}\{\sin\mu+\sin(\mu-2\lambda)\}+\\ &\Big/\left(\frac{d\lambda}{dw}\right)^2\Big\{-2\cos(\mu-2\lambda)\cdot\frac{d\lambda}{dw}+\sin(2\lambda-\mu)\cdot\frac{d^2\lambda}{dw^2}-\sin\mu\cdot\frac{d^2\lambda}{dw^2}\\ &+\cos(\mu-2\lambda)\frac{d\mu}{dv}\cdot\frac{d\lambda}{dw}+\cos\mu\cdot\frac{d\mu}{dv}\cdot\frac{d\lambda}{dv}-2\cos\mu\left(\frac{d\mu}{dv}\right)^2\Big\}=0 \end{aligned}\right\}\quad(95)$$

Wenn im undeformirten Zustand — wobei w und v dann rechtwinklige Koordinaten sind — die Kurve F (w, v) = 0 aller Punkte gegeben ist, in denen $\sigma_v = 0$ wird und die Kurve Φ (w, v) = 0 aller Punkte, für welche σ_w verschwindet, so liegt die Möglichkeit vor, bei gegebenen Deformationskurven die Variabelen f'(v) und φ'(w) aus den Gleichungen (94), (95) in Verbindung mit F(w, v) = 0 und Φ(w, v) = 0 zu ermitteln; damit wäre dann der Spannungszustand bestimmt.

11. Die analytische Bestimmung der Randspannungen und der äusseren Kräfte.

Die Randspannungen bei der beliebig begrenzten Haut werden erhalten, indem man in den Ausdrücken für σ_v, σ_w (90), (91) die vorkommenden Variabelen w und v durch Φ (t) und F (t) ersetzt (vgl. Gleichung 43); wir wollen diese Werte mit σ_v (t) und σ_w (t) bezeichnen. Wir erkennen, dass die Randspannungen eindeutig bestimmt sind.

Durch die Randspannungen sind die äusseren Kräfte festgelegt, da in jedem Randpunkt die auf das Element dt der deformirten Haut wirkende Kraft $P \cdot dt$ im Gleichgewicht stehen muss mit $\sigma_v \cdot dw$ und $\sigma_w \cdot dv$; es bestehen demnach die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X \cdot dt &= {}_x\sigma_v(t)\,dw + {}_x\sigma_w(t) \cdot dv = {}_x\sigma_v(t) \cdot \Phi'(t) \cdot dt + {}_x\sigma_w(t) \cdot F'(t) \cdot dt \\ Y \cdot dt &= {}_y\sigma_v(t)\,dw + {}_y\sigma_w(t) \cdot dv = {}_y\sigma_v(t) \cdot \Phi'(t) \cdot dt + {}_y\sigma_w(t) \cdot F'(t) \cdot dt \end{aligned}\right\} 96)$$

Nach Division mit dt erhalten wir in X und Y die Kraftkomponenten, die auf die Parametereinheit der deformirten Hautbegrenzung wirken. Bedenken wir — wenn wir die Bogenlänge als Parameter einführen —, dass dt nach der Deformation durch

$$dt = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{dv^2 + dw^2 + 2\,dv \cdot dw \cdot \cos(\lambda - \mu)}$$

(n. Gl. 9), dagegen vor der Deformation durch:

$$dt = \sqrt{dv^2 + dw^2}$$

ausgedrückt ist, so erhalten wir pro Längeneinheit der undeformirten Randbegrenzung eine wirkende Kraft mit den Komponenten:

$$X \cdot \frac{\sqrt{dv^2 + dw^2 + 2\,dv\,dw\cos(\lambda - \mu)}}{\sqrt{dv^2 + dw^2}}$$

$$Y \cdot \frac{\sqrt{dv^2 + dw^2 + 2\,dv\,dw\cos(\lambda - \mu)}}{\sqrt{dv^2 + dw^2}}$$

Anders liegen die Verhältnisse bezüglich der äusseren Kräfte für eine Begrenzung der Haut, die mit einer Linie $w = \text{const.}$ oder $v = \text{const.}$ zusammenfällt. Betrachten wir z. B. eine Randkurve $v = 0$, so ist:

$$X = \{{}_x\sigma_v\}_{v=0} \qquad Y = \{{}_y\sigma_v\}_{v=0}.$$

Dieses Gleichungspaar drückt aus, dass die äussere Kraft, welche an einem Randpunkte auftritt, der Grösse und Richtung nach gleich der Spannung σ_v ist, welche gerade am Rande wirkt.

Ist es denn nicht möglich, dass äussere Kräfte auftreten, die in eine andere Richtung fallen? Um diese Frage zu beantworten, fassen wir direkt eine Haut ins Auge, die von der Kurve $v = 0$ begrenzt ist. Die äussere Kraft $P \cdot dw$, die in einem Begrenzungspunkt angreift, muss mit drei Spannungen im Gleichgewicht stehen; bezeichnen wir die Spannung längs des Randes mit σ_ϱ — welche nur eine Funktion von w ist —, so bestehen die Gleichungen:

$$X \cdot dw + {}_x\sigma_\varrho \cdot dv + d({}_x\sigma_\varrho \cdot dv) = \{{}_x\sigma_v\}_{v=0} \cdot dw + {}_x\sigma_\varrho \cdot dv$$

$$Y \cdot dw + {}_y\sigma_\varrho \cdot dv + d({}_y\sigma_\varrho \cdot dv) = \{{}_y\sigma_v\}_{v=0} \cdot dw + {}_y\sigma_\varrho \cdot dv$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} X \cdot dw + d({}_x\sigma_\varrho \cdot dv) &= \{{}_x\sigma_v\}_{v=0} \cdot dw \\ Y \cdot dw + d({}_y\sigma_\varrho \cdot dv) &= \{{}_y\sigma_v\}_{v=0} \cdot dw \end{aligned}\right\} \quad 97)$$

Wenn die Spannung ${}_x\sigma_\varrho \cdot dv$ von derselben Grössenordnung ist, wie $X \cdot dw$, $\sigma_v \cdot dw$ . . . — d. h. unendlich klein von der 1. Ordnung —, dann kann das Glied $d(\sigma_\varrho \cdot dv)$ gegenüber den anderen vernachlässigt werden, und wir erhalten eine äussere Kraft mit Grösse und Richtung von $\{\sigma_v\}_{v=0}$.

Die Spannung σ_ϱ in Gleichung (97) kann aber auch (wie z. B. bei Fig. 18) die Form haben:

$${}_x\sigma_\varrho \cdot dv = {}_x\bar{\sigma}_\varrho \cdot dv + f_x(w)$$

$${}_y\sigma_\varrho \cdot dv = {}_y\bar{\sigma}_\varrho \cdot dv + f_y(w),$$

wobei σ_ϱ die Spannung bedeutet, die aus σ_w hervorgeht, indem $v = 0$ gesetzt wird, während die Grössen f_x und f_y willkürliche Funktionen und endliche Werte sind, aber den Grenzbedingungen unterworfen: $\{f_x(w)\}_{w=0} = 0$, $\{f_x(w)\}_{w=l} = 0$, bezw. $f_y(w)_{w=0} = 0$, $\{f_y(w)\}_{w=l} = 0$ (l = Länge der Hautseite); denn in den Endpunkten dieser Hautseite muss die unendlich kleine äussere Kraft im Gleichgewicht stehen mit den zwei Spannungen $\sigma_v \cdot dw$ und $\sigma_w \cdot dv$.

Durch diese willkürlichen Funktionen f_x und f_y wird die specifische Randspannung unendlich gross; und da die Randspannungen unbestimmt sind, so sind auch die äusseren Kräfte nicht festgelegt. Wir haben damit das Resultat gewonnen: Die Kräftekurve, welche zu einer Hautbegrenzung gehört, die mit einer Deformationskurve

zusammenfällt, kann beliebig verschoben werden — soferne dieselbe nur durch die Eckpunkte des Gespinnstes geht —, ohne dass sich dadurch die Spannungen im Inneren der Haut ändern; fällt die Kräftekurve in die Verbindungslinie der Gespinnsteckpunkte, — oder ist sie dieser unendlich nahe — so treten endliche specifische Spannungen auf von der Grösse $\{\sigma_w\}_{v=0}$ für die Begrenzungskurve $v = 0$, bezw. $\{\sigma_v\}_{w=c}$ für eine Begrenzungskurve $w = c$; haben wir dagegen wirkliche Kräftekurven, so treten unendlich grosse specifische Spannungen auf, welche durch Einfügen eines Seiles aufgehoben werden können. Wir gelangen so zu dem Resultat, das wir schon S. 44 auf Grund des Gespinnstes erhalten haben.

Dass thatsächlich bei einer solchen Hautbegrenzung die spec. Randspannungen unendlich gross werden können, ist leicht einzusehen, wenn wir ein Randelement eines engmaschigen Netzes betrachten: die unendlich kleine Kraft $P \cdot dw$ hat mit zwei Spannungen in der w-Richtung und einer Spannung in der v-Richtung Gleichgewicht zu halten; erstere beiden Kräfte können endliche Werte besitzen; die Differenz derselben ist von der gleichen Grösseordnung, wie $\sigma_v \cdot dw$ und $P \cdot dw$, und so werden diese drei unendlich kleinen Kräfte im Gleichgewicht stehen.

Dass die äusseren Kräfte, die längs einer Begrenzung wirken, welche nicht mit einer Deformationskurve zusammenfällt, bestimmt sind, soferne das Gespinnst im übrigen festgelegt ist, zeigt das graphische Beispiel Fig. 22: es liegt ein deformirtes, trapezförmiges Netz vor, dessen Deformationskurven Kettenlinien sind; statt der Enveloppen W, V sind bestimmte Punkte der Gespinnstebene eingeführt. Wir zeichnen das Gespinnst gerade so auf, wie bei dem rechteckigen Netz; die Kräftekurven O, U sind willkürlich, nur müssen sie durch die Gespinnstpunkte A, B, bezw. C, D hindurchgehen. Die Kräftekurven R, L dagegen sind eindeutig bestimmt: wir erhalten durch Aufzeichnung des Gespinnstes zwischen B, C, bezw. A, D eine Staffellinie; die Längen der Staffelseiten geben die Spannungen in den Randseiten der Netzbegrenzung R und L an, und die Verbindungslinie zweier benachbarten äusseren Staffelecken liefert die Grösse und Richtung der äusseren Kraft, die in dem zugehörigen Netzpunkt angreift; beispielsweise ist $\overline{MN}$ die Kraft, welche im Punkte 37 des Netzes wirkt. Die Verbindungskurve der äusseren Staffeleckpunkte zwischen A, D, bezw. B, C giebt uns also die Kräftekurve L, bezw. R an.

12. Beispiele zu den vorhergehenden Ausführungen.

I. Die Deformationskurven seien Kettenlinien.

Wir wollen die Gleichungen (35), (36) zu Grunde legen, jedoch mit der Vereinfachung: $g = h_1 = 0$ (vgl. Fig. 17).

$$\cos \mu(v) = \frac{q \cdot v}{\sqrt{h^2 + q^2 v^2}} \qquad \sin \mu(v) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + q^2 v^2}} \quad . \quad 98)$$

$$\cos \lambda(w) = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + m^2 w^2}} \qquad \sin \lambda(w) = \frac{m w}{\sqrt{g_1^2 + m^2 w^2}} \quad . \quad 99)$$

An die Stelle der W-, bezw. V-Kurve treten die Punkte g_1, 0, bezw. 0, h. — Es wird nach den Spannungen und den äusseren Kräften gefragt, wobei geradlinige Kräftekurven vorausgesetzt werden sollen; die Haut habe rechtwinklige Begrenzung.

Es ist zu setzen:

$$\left.\begin{array}{cc} f'(v) = 0 & \varphi'(w) = 0 \\ a_v = 0 \quad b_v = h & a_w = g_1 \quad b_w = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad 100)$$

$$\frac{d\mu}{dv} = \frac{-h q^2 v}{\{h^2 + q^2 v^2\}^{3/2}} \cdot \frac{1}{\cos \mu(v)} = \frac{-h \cdot q^2 \cdot v}{\{h^2 + q^2 v^2\}^{3/2}} \cdot \frac{\{h^2 + q^2 v^2\}^{1/2}}{q \cdot v}$$

$$\frac{d\mu}{dv} = -\frac{h \cdot q}{h^2 + q^2 v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 101)$$

$$\frac{d\lambda}{dw} = \frac{g_1 \cdot m^2 \cdot w}{\{g_1 + m^2 w^2\}^{3/2}} \cdot \frac{\{g_1 + m^2 w^2\}^{1/2}}{m \cdot w}$$

$$\frac{d\lambda}{dw} = \frac{g_1 \cdot m}{g_1^2 + m^2 w^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 102)$$

Mit Einsetzung dieser verschiedenen Werte in die Ausdrücke (90), (91) erhalten wir:

$$\sigma_w = -\frac{-g_1 \cdot \sin \lambda(w) + h \cdot \cos \lambda(w))}{\{\sin \lambda(w) \cdot \cos \mu(v) - \cos \lambda(w) \sin \mu(v)\}^2} \cdot \frac{d\mu}{dv}$$

oder auch:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_w = \dfrac{\sqrt{g_1^2 + m^2 w^2} \cdot (h - m w)}{\{h g_1 - q \cdot v \cdot m \cdot w \cdot\}^2} \cdot h g_1 q \\ \text{und entsprechend:} \\ \sigma_v = \dfrac{\sqrt{h^2 + q^2 v^2} \cdot (g_1 - q v)}{\{h g_1 - q \cdot v \cdot m \cdot w\}^2} \cdot h g_1 m \end{array}\right\} \quad 103)$$

Da wir geradlinige Kräftekurven annehmen, so werden die äusseren Kräfte aus den Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= \{\sigma_v \cdot \sin \mu(v)\}_{v=0} = m & X_0 &= \{-\sigma_v \cdot \cos \mu(v)\}_{v=0} = 0 \\ -X_1 &= \{\sigma_w \cdot \cos\lambda(w)\}_{w=0} = q & -Y_1 &= \{-\sigma_w \cdot \sin\lambda(w)\}_{w=0} = 0 \end{aligned}\right\} 104)$$

Gehen wir umgekehrt von diesen Kräften aus und setzen in den Gleichungen (69), (70) für g und h_1 den Wert 0 ein, so erhalten wir in der That die Werte für σ_w, σ_v, wie sie in (103) angegeben sind.

Um die Kurve im undeformirten Zustand — bezogen auf die rechtwinkligen Axen w, v — zu finden, längs welcher sich die Haut überschlägt, bilden wir auf Grund der Gleichungen (98), (99) die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\lambda(w) = \operatorname{tg}\mu(v);$$

es ergiebt sich:

$$v \cdot w = \frac{g_1 h}{q \cdot m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 105)$$

Die Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Assymptoten in die Axen fallen. Der Punkt $\left\{\begin{matrix} v = \frac{g_1}{q} \\ w = \frac{h}{m} \end{matrix}\right\}$ giebt uns den Scheitel der Hyperbel an. Dass für diesen Punkt die beiden Kurven zusammenfallen, erkennen wir auch aus dem Gespinnst, indem die zugehörigen Gespinnstlinien beide in die Verbindungslinie der Punkte $(g_1, 0)$ und $(0, h)$ fallen. Wird $v < \frac{g_1}{q}$, so ist $w > \frac{h}{m}$; für alle Punkte der Haut, deren zugehöriges $w < \frac{h}{m}$ und $v < \frac{g_1}{q}$ ist, kann keine Ueberschlagung eintreten. —

II. Beispiel: Die deformirten Kurven w, v seien Kreisbögen; es sind die Spannungen und äusseren Kräfte bei geradlinigen Kräftekurven zu bestimmen.

Die Gleichungen der Kurven $v = 0$ und $w = 0$ mögen in der Form gegeben sein:

$$\xi_w = r \cdot \cos\left(\alpha + \frac{w}{r}\right) + l \qquad \eta_w = r \cdot \sin\left(\alpha + \frac{w}{r}\right) + m \quad . \quad 106)$$

$$\xi_v = r_1 \cdot \cos\left(\alpha_1 - \frac{v}{r_1}\right) + l_1 \qquad \eta_v = r_1 \cdot \sin\left(\alpha_1 - \frac{v}{r_1}\right) + m_1 \quad . \quad 107)$$

In diesen Formeln bedeuten: l, m (bezw. l_1, m_1) die Mittelpunktskoordinaten des w- (v-) Kreises mit dem Radius r (r_1); w (v) die Bogenlänge der Kurve w (v) vom Punkte $w=0$, $v=0$ aus und α (α_1) der Winkel, welchen der Radiusvektor des w- (v-) Kreises nach dem Punkte $w=0$, $v=0$ mit der ξ-Richtung bildet. —

Bei unserem Beispiel ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos\mu(v) &= \frac{\partial\xi}{\partial v} = \sin\left(\alpha_1 - \frac{v}{r_1}\right) \qquad \cos\lambda(w) = \frac{\partial\xi}{\partial w} = -\sin\left(\alpha + \frac{w}{r}\right) \\ \sin\mu(v) &= \frac{\partial\eta}{\partial v} = -\cos\left(\alpha_1 - \frac{v}{r_1}\right) \qquad \sin\lambda(w) = \frac{\partial\eta}{\partial w} = \cos\left(\alpha + \frac{w}{r}\right) \\ \frac{d\mu}{dv} &= -\frac{1}{r_1} \qquad\qquad \frac{d\lambda}{dw} = \frac{1}{r} \end{aligned}\right\} 108)$$

Wird $f'(v)=k$ und $\varphi'(w)=k_1$ eingeführt, so ergeben sich die Enveloppen der Gespinnstlinien als Kreise mit den Radien $k\cdot r_1$ und $k_1\cdot r$.

Der Einfachheit wegen möge nun $\alpha=\alpha_1$ und $r=r_1$ gesetzt werden; diese Beziehungen drücken aus, dass die Kurven w und v Teile desselben Kreises sind. Ferner nehmen wir $k=k_1$ an, damit auch die zugehörigen Kurven W, V in der Gespinnstebene demselben Kreise angehören. Da die w- und v-Kurve — als Teile desselben Kreises — im Punkte $w=0$, $v=0$ die gleiche Tangente haben, so müssen auch die Kurven W und V in den Punkten a_v, b_v und a_w, b_w gleiche Richtungstangente besitzen und ein im Endlichen geschlossenes Kräftepolygon ist nur möglich, wenn die beiden Punkte zusammenfallen, also $a_v=a_w$ und $b_v=b_w$ ist. Unter diesen Annahmen gelangen wir nach den Gleichungen (90), (91) zu den Werten:

$$= \frac{k\cdot\int_0^v \sin\left(-\frac{v}{r}-\frac{w}{r}\right)dv - k\cdot\sin\left(\alpha+\frac{w}{r}\right)\cdot\int_0^w \cos\left(\alpha+\frac{w}{r}\right)\cdot dw - \cos\left(\alpha+\frac{w}{r}\right)\cdot k\cdot\int_0^w -\sin\left(\alpha+\frac{w}{r}\right)dw}{r\cdot\sin^2\left(\frac{v+w}{r}\right)}$$

$$\sigma = \frac{k \cdot \int_0^w \sin\left(\frac{v}{r} + \frac{w}{r}\right) dw + k \cdot \sin\left(\alpha - \frac{v}{r}\right) \cdot \int_0^v - \cos\left(\alpha - \frac{v}{r}\right) dv + \cos\left(\alpha - \frac{v}{r}\right) \cdot k \cdot \int_0^v \sin\left(\alpha - \frac{v}{r}\right.}{r \cdot \sin^2\left(\frac{v+w}{r}\right)}$$

die man noch auf die einfachen Ausdrücke bringen kann:

$$\sigma_w = \frac{r \cdot k \cdot \cos\frac{v+w}{r} - r \cdot k}{r \cdot \sin^2\left(\frac{v+w}{r}\right)} = -k \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{v+w}{r}\right)}{1 - \cos^2\left(\frac{v+w}{r}\right)}.$$

$$\sigma_w = \frac{-k}{1 + \cos\left(\frac{v+w}{r}\right)} = \frac{-k}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{v+w}{2r}\right)} \quad \ldots \quad 109)$$

$$\sigma_v = \frac{+k}{1 + \cos\left(\frac{v+w}{r}\right)} = \frac{+k}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{v+w}{2r}\right)} \quad \ldots \quad 110)$$

Die Komponenten X_o, Y_o, X_l, Y_l findet man aus den Gleichungen:

$$X_o = \left\{-\sigma_v \cdot \sin\left(\alpha - \frac{v}{r}\right)\right\}_{v=0} \qquad Y_o = \left\{-\sigma_v \cdot \cos\left(\alpha - \frac{v}{r}\right)\right\}_{v=0}$$

$$-X_l = \left\{-\sigma_w \cdot \sin\left(\alpha + \frac{w}{r}\right)\right\}_{v=0} \qquad -Y_l = \left\{-\sigma_w \cdot \cos\left(\alpha + \frac{w}{r}\right)\right\}_{w=0}$$

und man erhält:

$$X_o = \frac{-k}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{w}{2r}\right)} \cdot \sin\alpha \qquad Y_o = \frac{-k}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{w}{2r}\right)} \cdot \cos\alpha \quad 111)$$

$$-X_l = \frac{k}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{v}{2r}\right)} \cdot \sin\alpha \qquad -Y_l = \frac{k}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{v}{2r}\right)} \cdot \cos\alpha \quad 112)$$

Wir erkennen, dass die Kräftekurven O und L in dieselbe Gerade fallen, und zwar steht dieselbe senkrecht zur Richtung α. Nehmen wir etwa α als einen Winkel des 3. Quadranten an — vgl. Fig. 23 —, so wirken die Kräfte P_o, P_l gemäss den Gleichungen (111), (112) von links unten nach rechts oben, da

cos α und sin α negativ sind, also sowohl die X- wie die Y-Komponente positive Werte ergeben.

Die Kräfte P_u, P_r besitzen die Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} -X_u &= \frac{-k}{2\cdot\cos^2\left(\frac{w+c}{2r}\right)}\cdot\sin\left(\alpha-\frac{c}{r}\right) \\ -Y_u &= \frac{-k}{2\cdot\cos^2\left(\frac{w+c}{2r}\right)}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{c}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 113)$$

$$\left.\begin{aligned} X_r &= \frac{k}{2\cdot\cos^2\left(\frac{v+c}{2r}\right)}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{c}{r}\right) \\ Y_r &= \frac{k}{2\cdot\cos^2\left(\frac{v+c}{2r}\right)}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{c}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 114)$$

In diesen Formeln bedeutet c die Länge der Hautseite.

Liegen Netze in verschiedener Grösse vor — wir sprechen von einem Netz, um die Ueberlegungen bequemer an die Figuren anschliessen zu können —, die sich so deformiren sollen, dass die obere und linke Begrenzung in den Bogen eines bestimmten Kreises mit dem Radius r übergehen, und der Punkt $w=0$, $v=0$ in den Punkt M dieses Kreises fällt, so wird die Kräftewirkung für die verschiedenen Netze eine verschiedenartige sein, je nach der Länge die die Netzseite besitzt. Y_r bezw. X_u werden positiv, sobald $c > \sigma_w$ bezw. $c > \sigma_v$ ist, wobei σ_w den Bogen angiebt, der zu dem Winkel $270^0 - \alpha$ gehört und σ_v denjenigen, welcher dem Winkel $\alpha - 180^0$ entspricht. Für $c = \sigma_v$ wird $X_u = 0$ und für $c = \sigma_w$ nimmt Y_r den Wert Null an.

Y_u bezw. X_r werden positiv, sobald $c > \sigma'_v$ bezw. $c > \sigma'_w$ ist, wobei die Bogenlängen σ'_v und σ'_w zu den Winkeln $\alpha - 90^0$ und $360^0 - \alpha$ gehören; es schlägt sich hierbei die Haut gerade um (vgl. Fig. 24). Dies ist ein specieller Fall der von uns erwähnten Ueberschlagung der Haut, indem die Ueberschlagungskurve in einen Punkt zusammengedrängt wird. Für die undeformirte Haut hat diese Kurve die Gleichung:

$$\sin\left(\alpha - \frac{v}{r}\right) = -\sin\left(\alpha + \frac{w}{r}\right)$$

und $$-\cos\left(\alpha - \frac{v}{r}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{w}{r}\right)$$

oder: $$\pi - \frac{v}{r} = \frac{w}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 115)$$

Das ist eine gerade Linie, die durch den Punkt $\left\{\begin{matrix} w = \frac{\pi}{2}\cdot r \\ v = \frac{\pi}{2}\cdot r \end{matrix}\right\}$ hindurchgeht und mit der positiven w-Axe den Winkel $\frac{3\pi}{4}$ einschliesst (Fig. 23, c). Für $w < \frac{\pi}{2}\cdot r$ ist $v > \frac{\pi}{2}\cdot r$, und wir erkennen, dass innerhalb des Rechtecks, das durch die Seiten $w = \frac{\pi}{2}\cdot r$, $v = \frac{\pi}{2}\cdot r$ abgegrenzt wird, kein Ueberschlagungspunkt vorhanden ist; erst wenn die Hautseite $c > \frac{\pi}{2}\cdot r$ wird, tritt eine Ueberschlagung ein.

Ist $c = \frac{\pi r}{2}$, so müssen die Kräfte P_r, P_u parallel laufen, damit sich die Netzseiten in die gewünschte Kreisform einstellen, und diejenigen Kräfte P_r, P_u, welche an dem rechten, unteren Eckpunkt des Netzes angreifen, werden unendlich gross; da sie aber entgegengesetzt gerichtet sind, so heben sie sich auf. Wird nun $c > \frac{r\pi}{2}$, so gehen die Kräfte 13 und 22 — das sind die Kräfte, die in dem Punkte des Netzes angreifen, in welchem der umgeschlagene und nicht umgeschlagene Teil des Netzes zusammenstossen — durch die Unendlichkeit hindurch. Im Falle des Netzes kann die Kraft 13 durch die Summe der Kräfte $14 + 15 + 16 + 17 + 9 + 10 + 11 + 12$, aber in entgegengesetzter Richtung wirkend, ersetzt werden, ebenso die Kraft 22 durch die entgegengesetzt gerichtete Resultante der Kräfte $23 + 24 + 25 + 26 + 18 + 19 + 20 + 21$.

Das Gespinnst liegt stets symmetrisch zu dem Radiusvektor, der nach dem Punkte a_v, b_v gezogen ist.

Zu beachten ist, dass bei unserem Beispiele die Maschenseiten des Linienzuges w stets gedrückt, diejenigen des Linienzuges v gezogen werden; erstere Maschenseiten müssten also im praktischen

Falle wirkliche Stäbchen sein, während letztere durch Fäden gebildet werden können. In der Einleitung wurde hervorgehoben, dass Druckbeanspruchungen dann auftreten, wenn die Kraftvierecke des Gespinnstes überschlagen sind; das gilt aber nur für den Fall, dass die Umfangskräfte vom Netze ab nach aussen wirken. In unserem Beispiel sind dagegen die Kräfte P_l, P_r nach dem Netze zu gerichtet.

IV. Von den Hauptspannungen und den Spannungstrajektorien.

13. Die Ermittlung der Hauptspannungen und der Hauptrichtungen.

Um die Spannungen σ_v, σ_w an den verschiedenen Stellen der Haut zu finden, gingen wir von einem Netz mit kleinen rhombischen Maschen aus, bestimmten die Deformation desselben und führten Hautelemente von der Grösse der Maschen ein mit den Knotenpunkten des Netzes als Mittelpunkten; so konnten wir von dem engmaschigen Netz zur Haut übergehen. Umgekehrt können wir uns statt der Haut, die an jeder Stelle bestimmte Spannungen σ_w, σ_v hat, ein Netz mit den Maschenseiten dw, dv denken, für welches die Spannungen in den Netzfäden durch die Grössen $\sigma_w \cdot dv$, $\sigma_v \cdot dw$ gegeben sind, wenn σ_w, σ_v die specifischen Spannungen angeben, welche an der betreffenden Stelle in Richtung der w- und v-Kurve herrschen. Die Kurven w, v schneiden sich im allgemeinen nicht rechtwinklig.

Statt dieser Kurvensysteme können wir auch andere einführen: wir schneiden ein beliebiges Hautelement mit den Seiten $d\lambda$, dk heraus (Fig. 25), ermitteln die Spannungen σ_λ, σ'_λ und σ_k, σ'_k, die auf die Seiten dk und $d\lambda$ wirken, und ersetzen den Spannungszustand an dem Hautelement durch die Spannungen $\sigma_\lambda \cdot dk$, $\sigma_k \cdot d\lambda$.. in kleinen Netzfäden, die inmitten des Hautelementes zusammenstossen und die Richtung von σ_λ, σ_k, . . . besitzen. Führen wir dieses für alle Hautelemente durch, so gelangen wir abermals zu einem Netz, das die Haut bezüglich ihrer Spannungsverhältnisse ersetzt. Auf diese Weise können wir ganz verschiedenartige Netze

erhalten. Während die oben angegebenen Hautelemente (mit den Seiten dw, dv) die Eigentümlichkeit besitzen, dass die Spannungen σ_w bezw. σ_v in die Richtung von dw bezw. dv fallen, wird im allgemeinen σ_λ und $d\lambda$ bezw. σ_k und dk nicht dieselbe Richtung haben; σ_λ wird irgend einen Winkel mit dk einschliessen, und σ_k wird unter irgend einem Winkel gegen $d\lambda$ geneigt sein.

Wir wollen nun versuchen, die Schnittrichtungen von $d\lambda$ und dk so zu wählen, dass die Spannung σ_λ senkrecht auf dk, die Spannung σ_k senkrecht auf $d\lambda$ steht. Es wird sich zeigen, dass dann auch beide Spannungen einen Winkel von 90^0 mit einander einschliessen (Fig. 26).

Es handelt sich zunächst darum, die Spannung σ_λ für eine beliebige Schnittrichtung φ zu bestimmen, wenn σ_w, σ_v der Grösse und Richtung nach gegeben sind. Wir schneiden zu diesem Zwecke an der betr. Stelle ein unendlich kleines Dreieck (Fig. 27) mit den Seiten δv, δw, δk heraus, (wobei natürlich δv und δw nicht einander gleich sind) und zerlegen die Spannung σ_λ in zwei Komponenten σ, τ, von denen die eine ($\sigma =$ Normalspannung) senkrecht auf δk steht, die andere ($\tau =$ Schubspannung) in Richtung dieser Seite fällt. Alsdann fragen wir uns, wie muss der Winkel φ gewählt werden, damit die Komponente σ ein Maximum (Minimum) wird; für diesen Fall tritt, wie wir sehen werden, keine Schubspannung auf, also die Spannung σ_λ steht senkrecht auf δk.

Die Winkel, welche δw, δv mit der ξ-Axe einschliessen, sind nach den Gl. (30), (31) bekannt; wir bezeichnen sie wieder mit λ und μ. Der Sinussatz, welchen wir auf das kleine Dreieck anwenden, liefert uns die Gleichungen:

$$\delta w = \frac{\sin(\varphi - \mu)}{\sin(\mu - \lambda)} \cdot \delta k = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\mu - \cos\varphi \cdot \sin\mu}{\sin\mu \cdot \cos\lambda - \cos\mu \cdot \sin\lambda} \cdot \delta k \cdot$$

$$\delta v = \frac{\sin(\varphi - \lambda)}{\sin(\mu - \lambda)} \cdot \delta k = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\lambda - \cos\varphi \cdot \sin\lambda}{\sin\mu \cdot \cos\lambda - \cos\mu \cdot \sin\lambda} \cdot \delta k \cdot$$

Damit an dem betrachteten Elemente Gleichgewicht herrscht, müssen die Gleichungen bestehen:

$$-\sigma_v \cdot \delta w \cdot \cos\mu - \sigma_w \cdot \delta v \cdot \cos\lambda - \tau \cdot \delta k \cdot \cos\varphi + \sigma \cdot \delta k \cdot \sin\varphi = 0.$$

$$\sigma_v \cdot \delta w \cdot \sin\mu + \sigma_w \cdot \delta v \cdot \sin\lambda + \tau \cdot \delta k \cdot \sin\varphi + \sigma \cdot \delta k \cdot \cos\varphi = 0.$$

Für dw, dv sind die angegebenen Werte einzusetzen, und man erhält die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\cdot\sin\varphi-\tau\cdot\cos\varphi-\sigma_v\cdot\frac{\sin(\varphi-\mu)}{\sin(\mu-\lambda)}\cdot\cos\mu\\ -\sigma_w\cdot\frac{\sin(\varphi-\lambda)}{\sin(\mu-\lambda)}\cdot\cos\lambda=0.\\ \sigma\cdot\cos\varphi-\tau\cdot\sin\varphi+\sigma_v\cdot\frac{\sin(\varphi-\mu)}{\sin(\mu-\lambda)}\cdot\sin\mu\\ +\sigma_w\cdot\frac{\sin(\varphi-\lambda)}{\sin(\mu-\lambda)}\cdot\sin\lambda=0.\end{aligned}\right\}\ 116)$$

Wir erkennen demnach, dass die Spannung σ_λ, als Resultante von σ und τ, für jede Schnittrichtung bestimmt werden kann, sobald die Spannungen für zwei beliebige Schnittrichtungen (λ und μ) bekannt sind.

Für die Komponente σ findet sich der Wert:

$$\sigma=\frac{\sin\varphi\cdot\cos\mu-\cos\varphi\cdot\sin\mu}{\sin\mu\cdot\cos\lambda-\cos\mu\cdot\sin\lambda}(\sin\varphi\cdot\cos\mu-\cos\varphi\cdot\sin\mu)\cdot\sigma_v$$

$$+\frac{\sin\varphi\cdot\cos\lambda-\cos\varphi\cdot\sin\lambda}{\sin\mu\cdot\cos\lambda-\cos\mu\cdot\sin\lambda}(\sin\varphi\cdot\cos\lambda-\sin\lambda\cdot\cos\varphi)\cdot\sigma_w.$$

Dieser Ausdruck kann in der Form geschrieben werden:

$$\sigma\cdot\sin(\mu-\lambda)=\frac{\sigma_v+\sigma_w}{2}-\sin 2\varphi\{\sigma_v\cdot\sin\mu\cdot\cos\mu+\sigma_w\cdot\sin\lambda\cdot\cos\lambda\}$$

$$-\frac{\cos 2\varphi}{2}\{\sigma_v\cdot(\cos^2\mu-\sin^2\mu)+\sigma_w(\cos^2\lambda-\sin^2\lambda)\}\quad 117)$$

Den Winkel $\bar{\varphi}$, für welchen σ ein Maximum oder Minimum wird, erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi}=0;$$

es ergiebt sich für $\bar{\varphi}$ der Wert:

$$\operatorname{tg} 2\bar{\varphi}=\frac{\sigma_v\cdot\sin 2\mu+\sigma_w\cdot\sin 2\lambda}{\sigma_v\cdot\cos 2\mu+\sigma_w\cdot\cos 2\lambda}\quad\ldots\quad 118)$$

Für sin μ, cos μ, . . können wir nach früherem auch die Ausdrücke setzen:

$$\sin \lambda = \frac{\partial \eta}{\partial w} \qquad \sin \mu = \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$\cos \lambda = \frac{\partial \xi}{\partial w} \qquad \cos \mu = \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Wir erkennen aus der Gleichung (118), dass es zwei Schnittrichtungen giebt, für welche σ einen grössten oder kleinsten Wert annimmt; diese beiden Schnittrichtungen stehen auf einander senkrecht, weil $\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg}(180^0 + 2\varphi)$. Da nun der Ausdruck für $\frac{d\sigma}{d\varphi}$ mit demjenigen von τ übereinstimmt, den wir aus den Gleichungen (116) erhalten, so ist ersichtlich, dass für die Schnittrichtungen $\overline{\varphi}$ die zugehörige Schubspannung verschwindet, d. h. es tritt nur eine Normalspannung auf. Die Spannungen σ_λ, welche diesen Schnittrichtungen entsprechen, stehen demnach senkrecht auf denselben und schliessen also einen rechten Winkel miteinander ein.

Diese Schnittrichtungen werden als Hauptrichtungen bezeichnet und die zugehörigen Spannungen als Hauptspannungen.*)

Um die Grösse der Hauptspannungen zu finden, berechnen wir am besten aus Gleichung (118) die Ausdrücke für $\sin 2\overline{\varphi}$, $\cos 2\overline{\varphi}$, setzen dieselben in Gleichung (117) ein und erhalten:

$$\sin (\mu - \lambda \cdot \sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma_v + \sigma_w}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left\{\sigma_v \cdot \cos 2\mu + \sigma_w \cdot \cos 2\lambda\right\}^2 + \left\{\sigma_v \cdot \frac{\sin 2\mu}{2} + \sigma_w \cdot \frac{\sin 2\lambda}{2}\right\}^2}$$

oder:

$$-\sin (\mu - \lambda) \cdot \sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma_v + \sigma_w}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_w^2 + 2\sigma_v \cdot \sigma_w \cdot \cos 2(\mu - \lambda)} \quad . \quad 119)$$

Das obere Vorzeichen liefert ein Maximum der Spannung, das untere ein Minimum. Aus Gleichung (119) geht hervor, dass σ_{max} und σ_{min} die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$\sigma^2 - \frac{\sigma_v + \sigma_w}{\sin (\mu - \lambda)} \sigma + \sigma_v \cdot \sigma_w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 120)$$

Dieses Resultat lässt sich auch auf einem anderen Wege ableiten, ohne dass man zuerst den Winkel φ bestimmt, für den σ

*) Vgl. Föppl: „Festigkeitslehre“ S. 28 ff., auf welchen die Ermittlung der Hauptspannungen für den Fall, dass d w und d v einen rechten Winkel einschliessen, durchgeführt ist.

einen grössten oder kleinsten Wert annimmt. Wir gehen wieder von dem kleinen Dreieck aus und legen (vgl. Fig. 28) die Schnittrichtung A C durch den Winkel χ fest, den die Normale zu A C mit der w-Seite einschliesst. Die Seiten δw, δv bilden mit einander den Winkel

$$\omega = \mu - \lambda.$$

Die Spannung σ_λ, welche auf δk wirkt, sei gegen die w- bezw. v-Richtung unter dem Winkel α bezw. β geneigt; es ist:

$$\omega = \alpha + \beta.$$

Damit die an dem Element wirkenden Kräfte einander Gleichgewicht halten, müssen die algebraischen Summen der Kraftkomponenten nach zwei Richtungen verschwinden; als solche führen wir die w- und v-Richtung ein und erhalten die Gleichungen:

$$\sigma_\lambda \cdot \delta k \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \omega} = \sigma_w \cdot \delta v = + \sigma_w \cdot \frac{\cos \chi}{\sin \omega} \cdot \delta k,$$

$$\sigma_\lambda \cdot \delta k \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} = \sigma_v \cdot \delta w = \sigma_v \cdot \frac{\cos (\omega - \chi)}{\sin \omega} \cdot \delta k.$$

Soll nun σ_λ eine Hauptspannung sein, so muss die Schnittrichtung A C derart liegen, dass:

$$\alpha = \chi \qquad \beta = -\chi + \omega;$$

wir gelangen auf diese Weise zu zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten: $\bar{\sigma}$ und $\bar{\chi}$.

$$\sigma_v \cdot \cos \omega \cdot \cos \bar{\chi} + \sigma_v \cdot \sin \omega \cdot \sin \bar{\chi} - \bar{\sigma} \cdot \sin \bar{\chi} = 0$$

$$\bar{\sigma} \cdot \sin \bar{\chi} \cdot \cos \omega - \bar{\sigma} \cdot \cos \bar{\chi} \cdot \sin \omega + \sigma_w \cdot \cos \bar{\chi} = 0,$$

die auch in der Form geschrieben werden können:

$$(\sigma_v \cdot \cos \omega) \cdot \cos \bar{\chi} + (\sigma_v \cdot \sin \omega - \bar{\sigma}) \cdot \sin \bar{\chi} = 0$$

$$(-\bar{\sigma} \cdot \sin \omega + \sigma_w) \cdot \cos \bar{\chi} + (\bar{\sigma} \cdot \cos \omega) \cdot \sin \bar{\chi} = 0.$$

Bezüglich $\cos \bar{\chi}$ und $\sin \bar{\chi}$ als Unbekannten, haben wir zwei homogene Gleichungen; damit dieselben neben einander bestehen können, muss die Determinante des Systems verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \sigma_v \cdot \cos \omega & \sigma_v \sin \omega - \bar{\sigma} \\ -\bar{\sigma} \cdot \sin \omega + \sigma_w & \bar{\sigma} \cdot \cos \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Rechnen wir diese Determinante aus und setzen für ω seinen Wert ein, so gelangen wir zu der Gleichung (120):

$$\bar{\sigma}^2 - \frac{\sigma_v + \sigma_w}{\sin(\mu - \lambda)}\bar{\sigma} + \sigma_v \cdot \sigma_w = 0.$$

Wenn wir an einer Stelle der Haut verschiedene Schnittrichtungen legen, die zu den betreffenden Richtungen zugehörigen Spannungen von einem Punkte aus in gleichem Massstabe auftragen, so liegen die Endpunkte dieser Strahlen auf einer Ellipse, deren Hauptaxen durch σ_{max} und σ_{min} gegeben sind.*)

Aus den Gleichungen (116) können wir die Schubspannung τ berechnen und uns fragen, für welche Schnittrichtung $\varphi = \psi$ wird die Schubspannung τ ein Maximum oder Minimum. Bilden wir $\frac{d\tau}{d\varphi} = 0$, so gelangen wir zu der Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2\bar{\psi} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\bar{\varphi}} = -\cot 2\bar{\varphi}, \quad \ldots \quad 121)$$

d. h. die Richtungen $\bar{\psi}$, $\bar{\psi} + 90°$, für welche τ seinen grössten oder kleinsten Wert erreicht, sind gegen die Hauptrichtungen unter 45° geneigt; es ist: $\bar{\psi} + 45° = \bar{\varphi}$.

Setzt man den Wert $\bar{\psi}$ in den Ausdruck für τ ein, so erhält man die Formel:

$$\sin(\mu - \lambda) \cdot \tau_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_w^2 + 2\sigma_v \cdot \sigma_w \cdot \cos 2(\mu - \lambda)} \quad 122)$$

Während für die Hauptrichtungen $\bar{\varphi}$ die Schubspannung verschwindet, nimmt die Normalspannung für die Schnittrichtung $\bar{\psi}$ den Wert an:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_v + \sigma_w}{\sin(\mu - \lambda)}.$$

Die Tangenten an die w- und v-Kurve einer deformirten Haut können nur an einer solchen Stelle Hauptrichtungen angeben, wo sie sich rechtwinklig schneiden. Und umgekehrt können wir sagen, wenn zwei Deformationskurven sich rechtwinklig schneiden, dann geben ihre Tangenten an der betreffenden Stelle Hauptrichtungen an; denn es ist: $\mu - \lambda = 90°$

$$\sin \mu = \cos \lambda \cdot$$
$$\cos \mu = -\sin \lambda.$$

*) Vgl. Föppl: „Festigkeitslehre", S. 34.

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck (118) ein, so finden wir:

$$\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = \frac{-\sigma_v \cdot \sin 2\lambda + \sigma_w \cdot \sin 2\lambda}{-\sigma_v \cdot \cos 2\lambda + \sigma_w \cdot \cos 2\lambda} = \frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\lambda} = \operatorname{tg} 2\lambda.$$

Da die verschiedenen Spannungen σ_λ einer Stelle Halbmesser einer Ellipse sind, so liegt die Frage nahe: können in irgend einem Punkte der Haut die Tangenten an die w- und v-Kurven in konjugirte Richtungen fallen? Da müsste sein:

$$\sigma^2_{max} + \sigma^2_{min} = \sigma_v^2 + \sigma_w^2.$$

Mit Benutzung der Gleichung (119) erkennen wir, dass diese Beziehung nur erfüllt ist, wenn

$$\cos(\mu - \lambda) = 0$$

ist, d. h. wenn die beiden Richtungen einen rechten Winkel einschliessen; dann sind aber nach obigem σ_v, σ_w Hauptspannungen.

---

14) Anwendung der allgemeinen Resultate auf ein Beispiel; Ermittlung des Netzes der Spannungstrajektorien für ein solches; Aufstellung der Differentialgleichungen für die Spannungstrajektorien.

Wir betrachten das unter No. 4 durchgeführte Beispiel. An einer Stelle w, v, für welche die Tangente an die w-Kurve horizontal, an die v-Kurve vertikal verläuft (also die entsprechenden Gespinnstlinien horizontale bezw. vertikale Richtung haben), werden dieselben die Hauptrichtungen angeben. Die krummlinigen Koordinaten w, v dieses Punktes bestimmen sich aus den Gleichungen (vgl. Fig. 9)

$$g = \frac{g_1 \cdot q \cdot v}{\sqrt{g_1^2 + h_1^2}} \qquad h_1 = \frac{m\,w\,h}{\sqrt{g^2 + h^2}} \quad . \; . \; 123)$$

Wenn diese Beziehungen bestehen, so verschwindet der Ausdruck (118) für $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi}$, den wir auf Grund der Formeln (35, 36), (69, 70) zu bilden haben. Die Spannungen σ_v, σ_w sind Hauptspannungen und besitzen die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_v &= \frac{g_1^2}{\{g_1 h - h_1 g\}} \cdot \frac{g_1 - g}{\sqrt{g^2 + h^2}} \cdot q \\ \bar{\sigma}_w &= \frac{h^2}{\{g_1 h - h_1 g\}} \cdot \frac{h - h_1}{\sqrt{g_1^2 + h_1^2}} \cdot m. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; 124)$$

Wir erhalten dieselben, indem wir die Grössen v, w aus den Ausdrücken (123) in die Gleichungen (69), (70) einsetzen.

Sobald $g_1 = h$, $g = h_1$ und $m = q$ ist, wird nach den Gleichungen (124): $\bar{\sigma}_v = \bar{\sigma}_w$; wenn die beiden Hauptspannungen einander gleich sind, dann besitzen alle Spannungen σ_λ dieselbe Grösse; die Spannungsellipse geht in einen Kreis über.

Beim Vergleich der allgemeinen Ausdrücke für σ_v, σ_w (69), (70) erkennen wir, dass für alle Punkte, für welche $w = v$ ist, σ_v und σ_w den gleichen Wert besitzen, soferne $g = h_1$, $h = g_1$, $m = q$ ist; d. h.: wenn das Gespinnst symmetrisch liegt zu einer geraden Linie unter 45° (vgl. Fig. 29), so ist für alle Punkte der Diagonale von links oben nach rechts unten: $\sigma_v = \sigma_w$. Diese Spannungen sind jedoch keine Hauptspannungen; denn für diesen Fall müssten die Tangenten an die w- und v-Kurven in den betreffenden Punkten auf einander senkrecht stehen; es müsste die Beziehung erfüllt sein:

$$\operatorname{tg} \lambda(w) = -\cot \mu(v).$$

In unserem Fall ist aber:

$$\cos \lambda(w) = \sin \mu(v) \cdot \qquad \text{und} \qquad \sin \lambda(w) = \cos \mu(v).$$

Berücksichtigen wir diese Beziehungen und setzen $\sigma_v = \sigma_w$ in den Ausdruck für $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi}$ ein, so erhalten wir: $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = \infty$, d. h.: wenn das Gespinnst symmetrisch zu einer geraden Linie gelegen ist, die einen Winkel von 45° mit der x-Axe bildet, so fällt für alle Punkte der erwähnten Diagonale die eine Hauptrichtung in diese Diagonale, die andre steht senkrecht zu derselben. Eine Ausnahme macht die oben erwähnte Stelle, an welcher sich die w- und v-Kurven senkrecht schneiden, indem an derselben jede Richtung Hauptrichtung ist. Da die Schnittrichtungen ψ, für welche τ seinen grössten bezw. kleinsten Wert erreicht, gegen die Hauptrichtungen unter 45° geneigt sind, so werden jene horizontal bezw. vertikal sein. —

Wir wollen nun für das vereinfachte Beispiel $h = g_1$, $g = h_1 = 0$, $m = q$ (Fig. 30) die deformirte Haut bezgl. ihrer Spannungsverhältnisse durch ein Netz ersetzen, dessen zwei Kurvenschaare sich rechtwinklig schneiden.

Die Kurven werden als Spannungstrajektorien bezeichnet; die Richtungen der Fäden geben an jeder Stelle die Richtung der Hauptspannungen an. Wir zeichnen die deformirte Haut auf und

bestimmen für verschiedene Stellen der Haut die Hauptrichtungen $\overline{\varphi}$, $90° + \overline{\varphi}$.

Die Spannungen σ_v, σ_w besitzen für diesen Fall die Werte:

$$\sigma_w = \frac{\sqrt{h^2 + m^2 w^2}}{h^2} \cdot \frac{h - m w}{\left\{1 - \frac{m^2 w v}{h^2}\right\}^2} \cdot m \quad . \quad . \quad . \quad 125)$$

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{h^2 + m^2 v^2}}{h^2} \cdot \frac{h - m v}{\left\{1 - \frac{m^2 w v}{h^2}\right\}^2} \cdot m \quad . \quad . \quad . \quad 126)$$

Die Richtung $\overline{\varphi}$ wird am einfachsten auf graphischem Wege gefunden, indem man von der Gleichung ausgeht:

$$\operatorname{tg} 2\overline{\varphi} = \frac{\sigma_v \cdot \sin 2\mu + \sigma_w \cdot \sin 2\lambda}{\sigma_v \cdot \cos 2\mu + \sigma_w \cdot \cos 2\lambda}.$$

Bekannt ist Grösse und Richtung der Spannungen σ_v, σ_w. Man konstruirt zuerst: $\sigma_v \cdot \sin 2\mu = 2\sigma_v \cdot \sin \mu \cdot \cos \mu$

und $\sigma_w \cdot \sin 2\lambda = 2\sigma_w \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda$

und findet aus $\sigma_v \cdot \sin 2\mu$ bezw. $\sigma_w \cdot \sin 2\lambda$ sofort $\sigma_v \cdot \cos 2\mu$ bezw. $\sigma_w \cdot \cos 2\lambda$, indem man ein rechtwinkliges Dreieck mit σ_v (σ_w) als Hypothenuse und $\sigma_v \cdot \sin 2\mu$ ($\sigma_w \cdot \sin 2\lambda$) als Kathete zeichnet. Durch entsprechende Addition dieser Werte erhält man Zähler und Nenner des obigen Bruches und kann den Winkel $2\overline{\varphi}$ angeben. Die Halbirungslinie dieses Winkels und die Senkrechte zu derselben geben die Hauptrichtungen an.

Da bei dieser graphischen Bestimmung der Hauptrichtungen nur σ_v, σ_w zu berechnen sind, während die übrigen Grössen $\sin \mu \ldots$ aus der Figur entnommen werden können, so wird im allgemeinen dieses Verfahren rascher zum Ziele führen, als das rein rechnerische. In unserem Beispiel ist allerdings auch die analytische Bestimmung leicht zu erledigen. Es betrage: $h = g_1 = 12$,

$l = 6$ Einheiten

$m = q = 1$ Krafteinheit (in cm ausgedrückt).

Wir zeichnen die Kurven — bezw. Linienzüge — $v = 1$, $v = 2 \ldots v = 6$ und die Kurven $w = 1$, $w = 2 \ldots w = 6$ auf und

ermitteln für die Schnittpunkte dieser Kurven die Hauptrichtungen auf Grund der Formel:

$$-\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = \frac{2\,h\,m\,v \cdot \frac{h - m\,v}{\sqrt{h^2 + m^2 v^2}} + 2\,h\,m\,w \cdot \frac{h - m\,w}{\sqrt{h^2 + m^2 w^2}}}{(m^2 v^2 - h^2) \cdot \frac{h - m\,v}{\sqrt{h^2 + m^2 v^2}} + (h^2 - m^2 w^2) \cdot \frac{h - m\,w}{\sqrt{h^2 + m^2 w^2}}} \quad 127)$$

Es wurde zuerst die Kurve $w = 0$ ins Auge gefasst und nach der Reihe die Werte $v = 0, 1, \ldots 6$ in die Gleichung (127) eingesetzt; dann wurden die Punkte $v = 0, 1, \ldots 6$ der Linie $w = 1$ durchgenommen u. s. w. Da das zur Haut gehörige Gespinnst symmetrisch zu einer geraden Linie liegt, die unter 45° gegen die x-Axe geneigt ist, so hat die deformirte Haut bezgl. der Diagonale von links oben nach rechts unten eine symmetrische Gestalt, und die Hauptrichtungen sind nur für die obere oder untere Hälfte zu berechnen. Es liefert z. B. der Punkt $v = 2$ auf der Kurve $w = 3$ den Wert: $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = +\frac{91{,}92}{16{,}25}$, während dem Punkte $v = 3$ der Kurve $w = 2$ der Wert: $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = -\frac{91{,}92}{16{,}25}$ zugehört.

Haben wir für die angegebenen Punkte die Hauptrichtungen eingezeichnet, so können wir annähernd genau zwei orthogonale Kurvensysteme eintragen, die ein Netz ergeben, das die Spannungsverhältnisse der Haut ersetzt, ähnlich wie dies für das Netz der w- und v-Kurven der Fall ist. Gehen wir von diesem Netz zur Haut über, so giebt uns der Hautfaden die Spannung an, deren zugehörige Schnittrichtung senkrecht auf derselben steht. Die Spannung S_k z. B. wirkt auf die Länge dk (vgl. Fig. 30).

Es ist noch zu bestimmen, welches Kurvensystem die Kurven der σ_{min} und welches die Kurven der σ_{max} angiebt. Wir betrachten z. B. einen Punkt der oberen Hälfte; es ergebe sich $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = +\frac{m}{n}$; der eine Winkel sei $2\varphi_1$, der andere $2\varphi_2 = 180^0 + 2\varphi_1$; wir haben:

$$\cos 2\varphi_1 = +m \qquad \cos 2\varphi_2 = -m.$$

$$\sin 2\varphi_1 = +n \qquad \sin 2\varphi_2 = -n.$$

Bilden wir mit Benützung von φ_1 den Ausdruck (119), so tritt das negative Vorzeichen auf, d. h. die Richtung φ_1 von links oben

nach rechts unten giebt diejenige Hauptrichtung an, welche σ_{min} zugehört; da σ_{min} senkrecht auf derselben steht, so geben die Kurven von links unten nach rechts oben die Richtung der σ_{min} an.

Zum Schlusse mögen noch die Differentialgleichungen der Spannungstrajektorien angegeben werden. Dieselben können auf Grund der Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = \frac{\sigma_v \cdot \sin 2\mu + \sigma_w \cdot \sin 2\lambda}{\sigma_v \cdot \cos 2\mu + \sigma_w \cdot \cos 2\lambda}$$

aufgestellt werden, indem man für $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi}$ den Wert setzt:

$$\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = \frac{2\frac{d\eta}{d\xi}}{1-\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}$$

Die Ausdrücke der rechten Seite der so entstehenden Gleichung: σ_v, σ_w, $\sin 2\mu$ .. sind Funktionen von w, v, während die linke Seite ξ, η, enthält. Wir werden deshalb $\operatorname{tg} 2\varphi$ durch v, w ausdrücken müssen, oder die Funktionen auf der rechten Seite durch ξ, η. Ersteres dürfte das einfachere sein. Es ist:

$$d\xi = dw \cdot \cos\lambda + dv \cdot \cos\mu \qquad d\eta = dv \cdot \sin\mu + dw \cdot \sin\lambda$$

in den Wert für $\operatorname{tg} 2\bar{\varphi}$ einzusetzen, und es ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} 2\bar{\varphi} = \frac{dv^2 \cdot \sin 2\mu + dw^2 \sin 2\lambda + 2\,dv\,dw \cdot \sin(\lambda+\mu)}{dv^2 \cdot \cos 2\mu + dw^2 \cos 2\lambda + 2\,dv\,dw \cdot \cos(\lambda+\mu)}$$
$$= \frac{\sigma_v \cdot \sin 2\mu + \sigma_w \cdot \sin 2\lambda}{\sigma_v \cdot \cos 2\mu + \sigma_w \cdot \cos 2\lambda}.$$

Aus dieser Beziehung findet man die Gleichung:

$$-\left(\frac{dv}{dw}\right)^2 \cdot \sigma_w \cdot \sin 2(\lambda-\mu) - 2\frac{dv}{dw}(\sigma_w - \sigma_v)\sin(\lambda-\mu) + \sigma_v \cdot \sin 2(\lambda-\mu) = 0,$$

welche auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{dv}{dw}\right)^2 \cdot \sigma_w + \frac{dv}{dw} \cdot \frac{\sigma_w - \sigma_v}{\cos(\lambda-\mu)} - \sigma_v = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 128)$$

Das ist also die Differentialgleichung derjenigen Kurven der undeformirten Haut, welche durch die Deformation in die Spannungstrajektorien übergehen, und zwar bezogen auf rechtwinklige Axen w, v. In der Gleichung (128) sind σ_w, σ_v Funktionen von w und v, dagegen λ eine Funktion nur von w, und μ eine solche von v allein. —

Lebenslauf.

Geboren am 4. Juli 1875 zu Offenbach a/M., Sohn des verstorbenen Grossh. Oberlandesgerichtsrats Nikolaus Edmund Schlink zu Darmstadt, besuchte ich von Ostern 1884 ab die Realgymnasien in Offenbach und Darmstadt und bestand auf letzterem im Frühjahr 1893 mein Maturum, um alsdann auf der Technischen Hochschule zu Darmstadt das Bau-Ingenieurfach zu studiren. Nachdem ich im Herbste 1897 das Schlussexamen abgelegt hatte, war ich als Grossh. hessischer Regierungsbauführer ein Jahr im Staatsdienst thätig und widmete mich vom Winter-Semester 1898 bis Sommer-Semester 1900 auf der Kgl. Universität und der Kgl. Technischen Hochschule in München den Studien der reinen und angewandten Mathematik, und besonders den theoretischen Ingenieurfächern. Bei Herrn Professor Dr. Lindemann besuchte ich funktionentheoretische Vorlesungen und bei den Herren Professoren Dr. Finsterwalder und Dr. Föppl solche über reine und angewandte Mathematik, speciell Mechanik. Seit Beginn des Winter-Semesters 1900 war ich auf der Technischen Hochschule zu Darmstadt als Assistent für Graphische Statik beschäftigt, und wurde später solcher für Maschinenbau.

Den genannten Herren bin ich zu grossem Dank verpflichtet, ebenso Herrn Geh. Hofrat Professor Dr. Henneberg in Darmstadt, bei welchem ich Vorlesungen über Mechanik hörte, und der mir häufig sehr wertvolle Anregungen bei meinen Studien bot; besonderen Dank schulde ich Herrn Professor Dr. Finsterwalder dafür, dass er mich auf diese Arbeit hinwies und mir jederzeit mit seinem geschätzten Rate bereitwilligst zur Seite stand. —

Wilhelm Schlink.

Fig. 1.

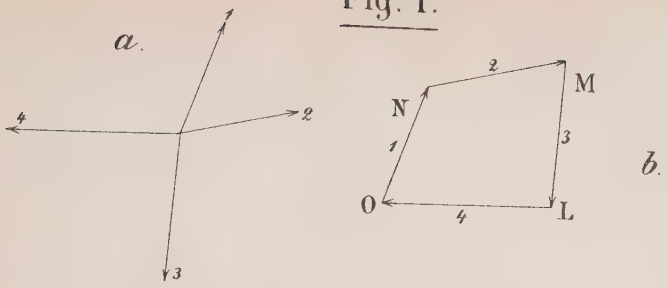


Fig. 2.

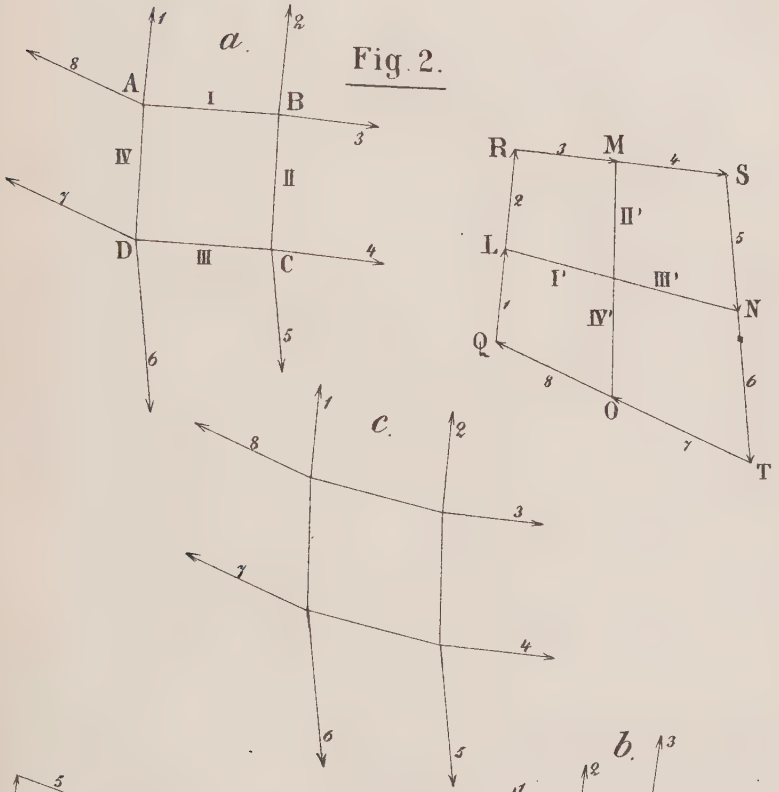


Fig. 3.

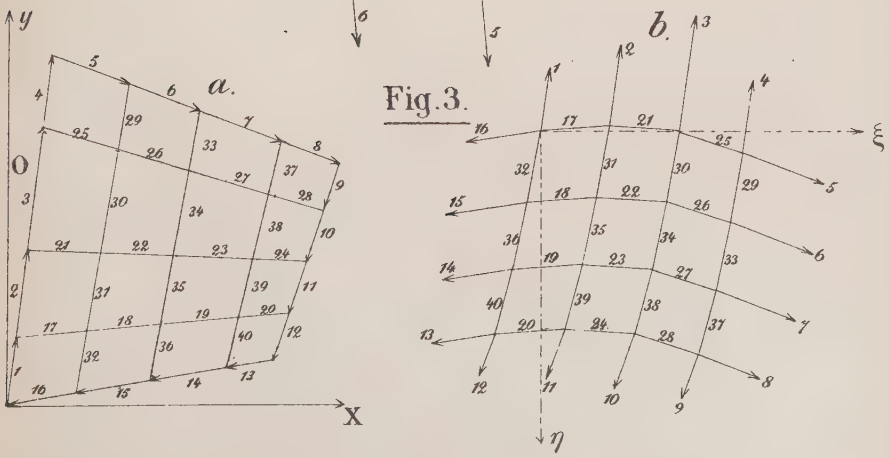


Fig. 4.

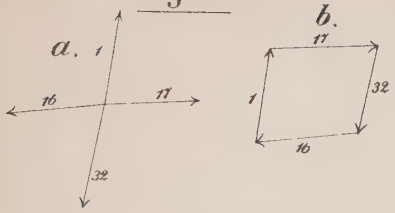


Fig. 6.

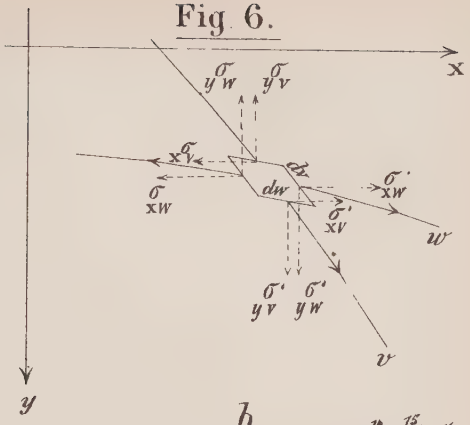
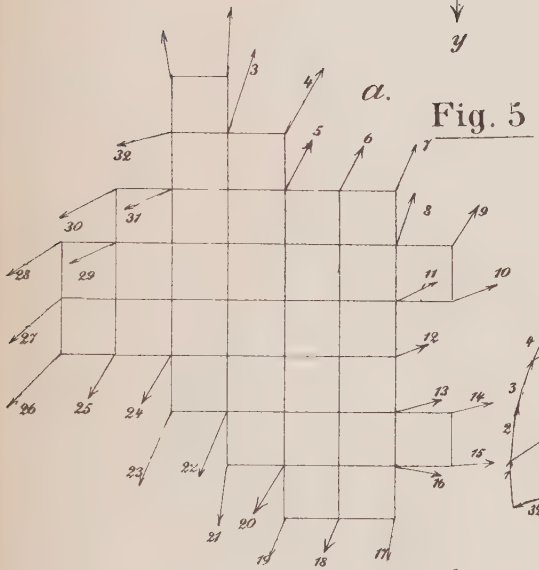
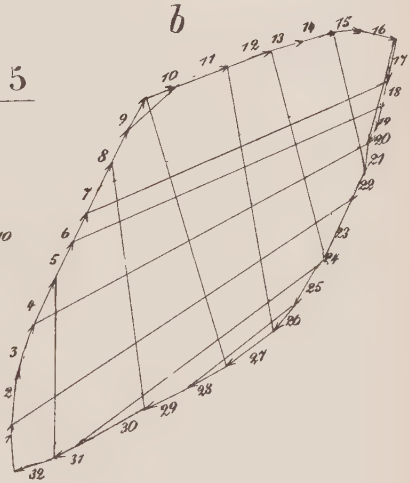


Fig. 5





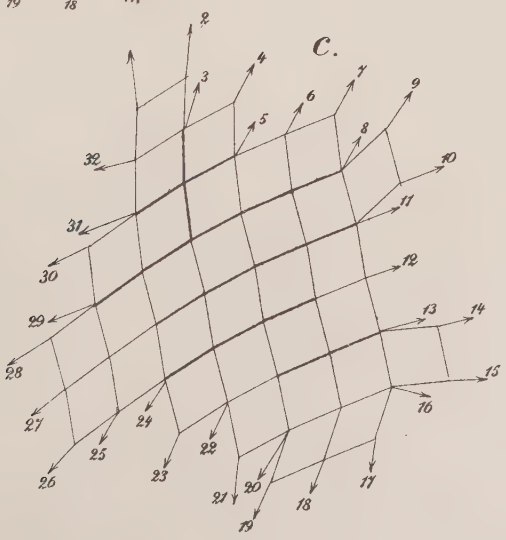


Fig. 7.

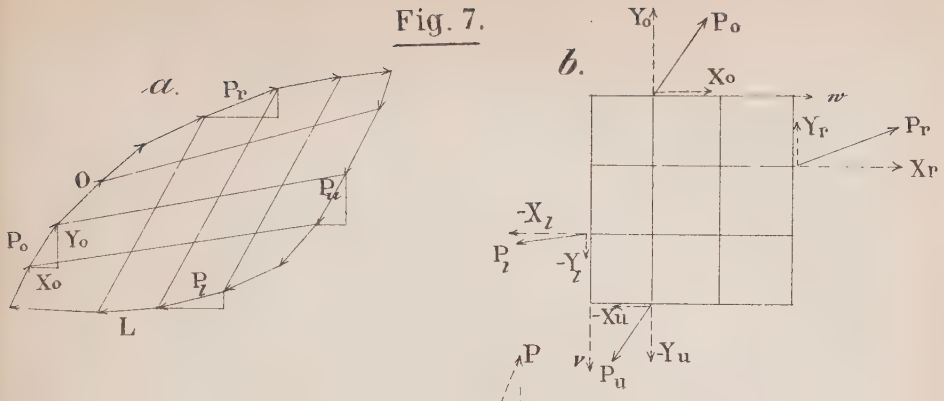

a.
Pr
O
Pu
Po
Yo
Xo
Pl
L
b.
Yo
Po
Xo
w
Yr
Pr
Xr
-Xl
Pl
-Yl
-Xu
v
Pu
-Yu

Fig. 8.

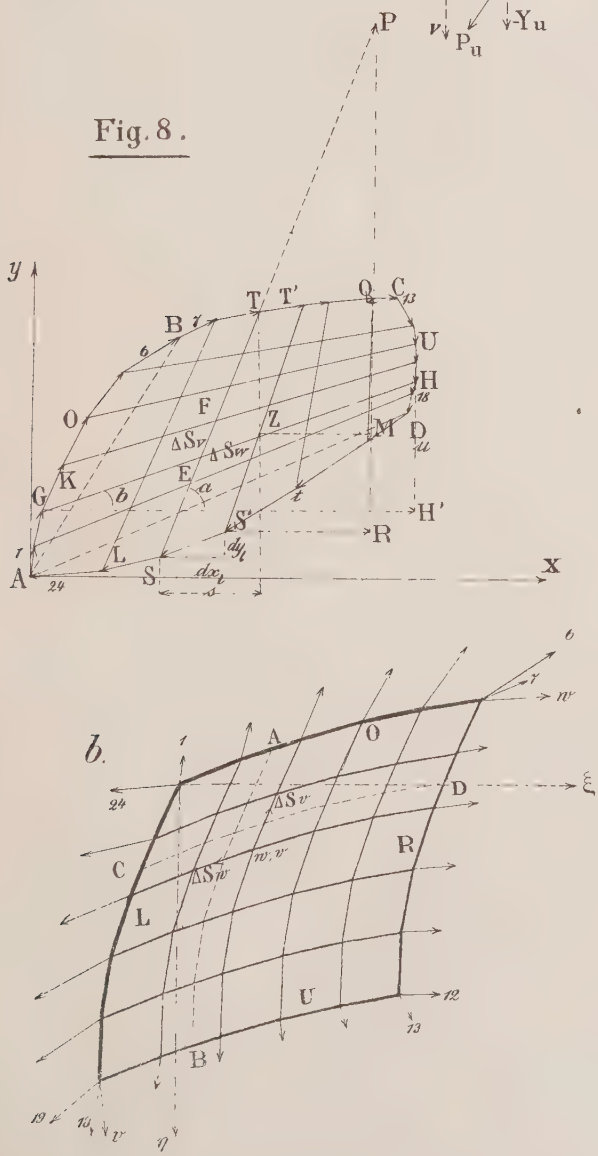
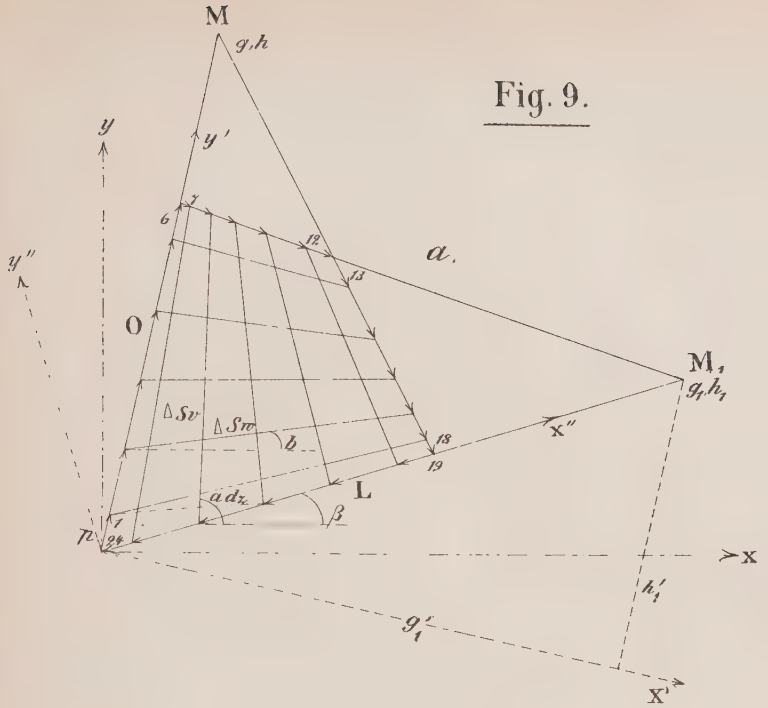

P
y
T
T'
Q
C
13
B
7
6
U
H
18
O
F
Z
M
D
u
ΔSv
ΔSw
K
E
G
b
a
t
S'
H'
R
1
L
A
24
S
dyl
dxl
s
x
b.
6
7
w
1
A
O
24
D
ξ
ΔSv
C
ΔSw
w, v
R
L
U
12
13
B
19
18
v
η

Fig. 9.



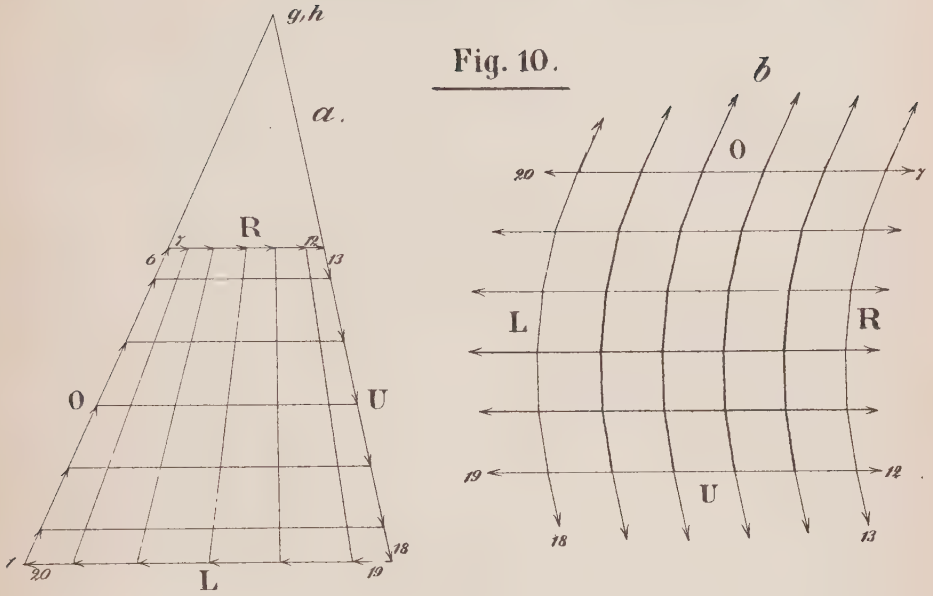


Fig. 10.

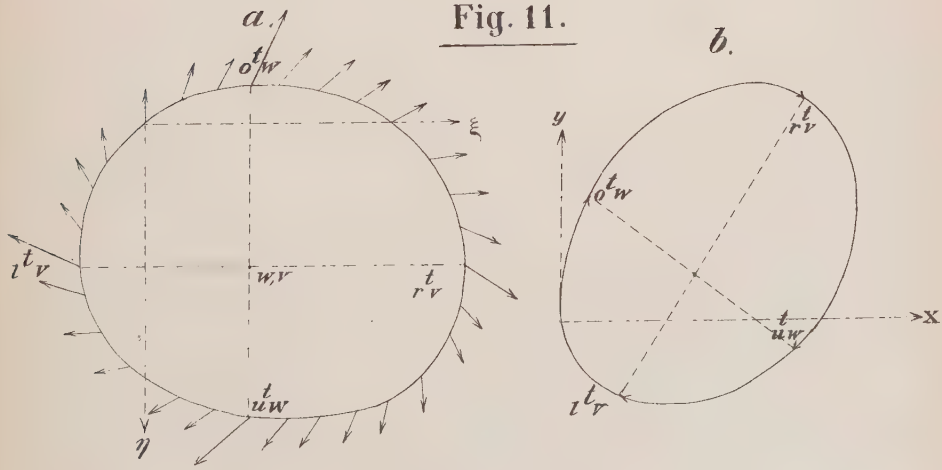


Fig. 11.

Fig. 12.

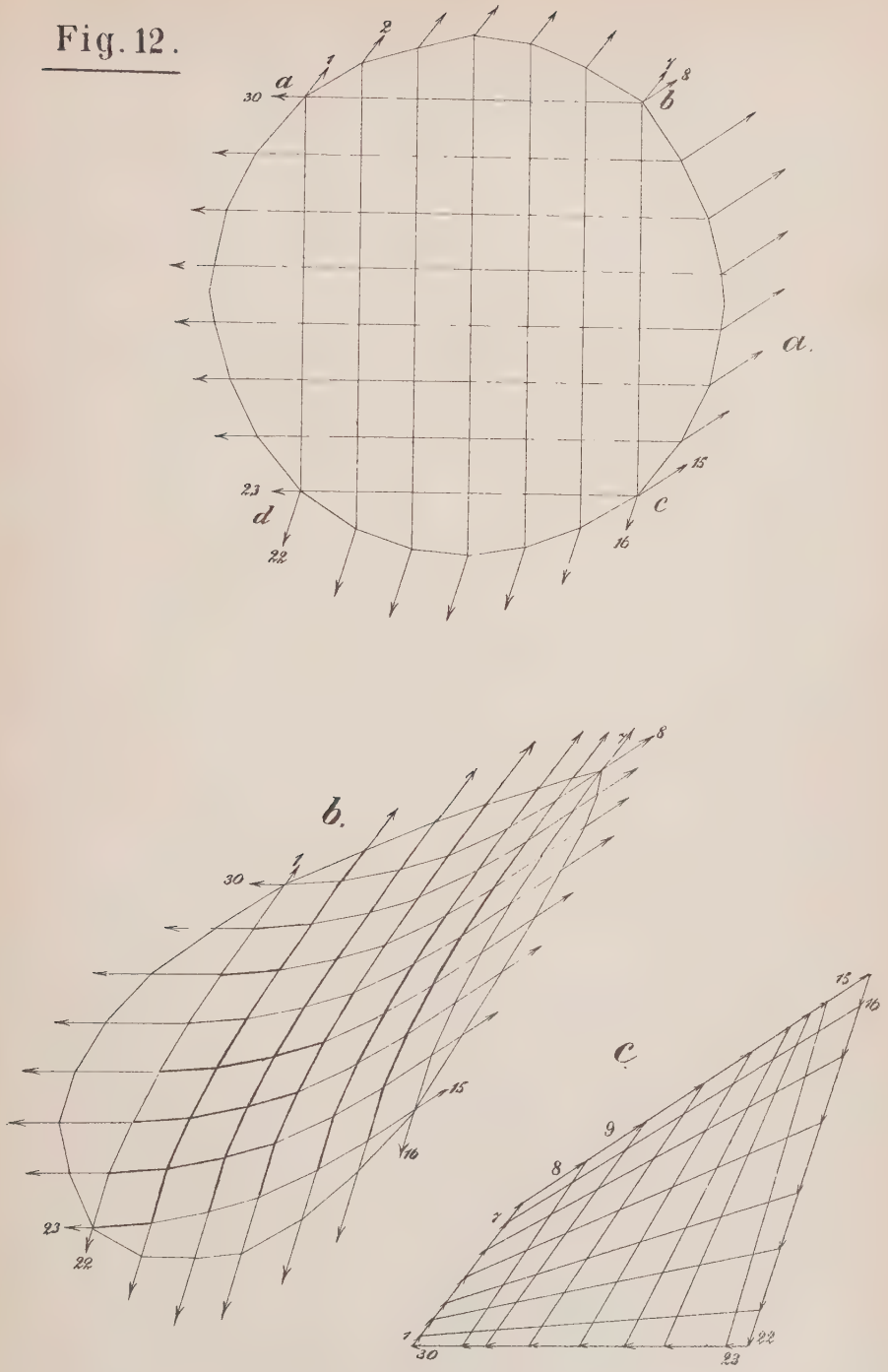
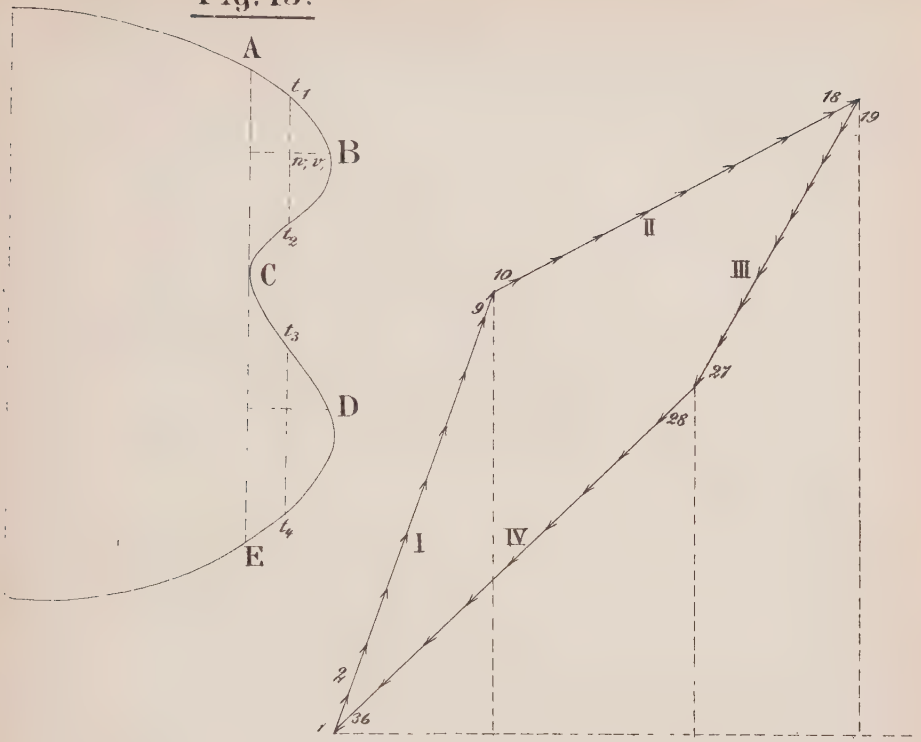


Fig. 13.



a. *b.*

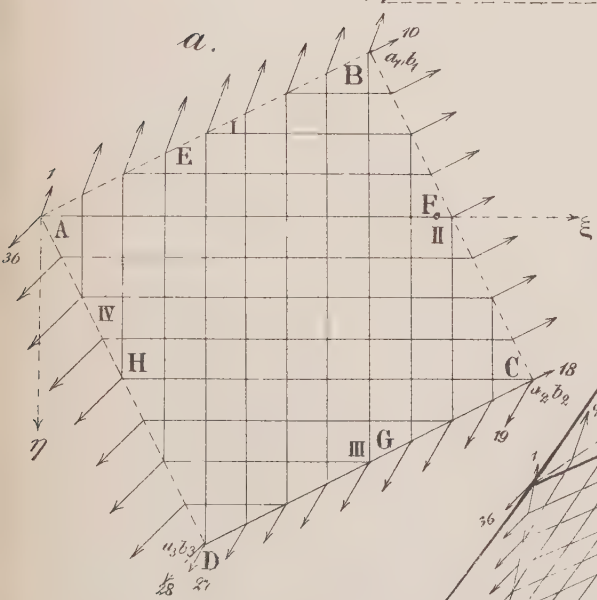


Fig. 14.

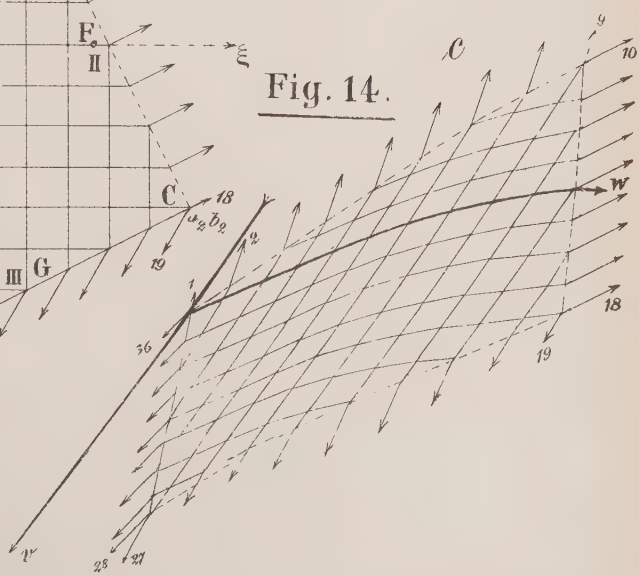


Fig. 15.

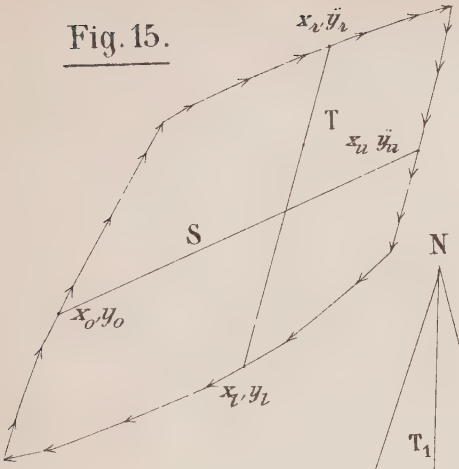


Fig. 16.

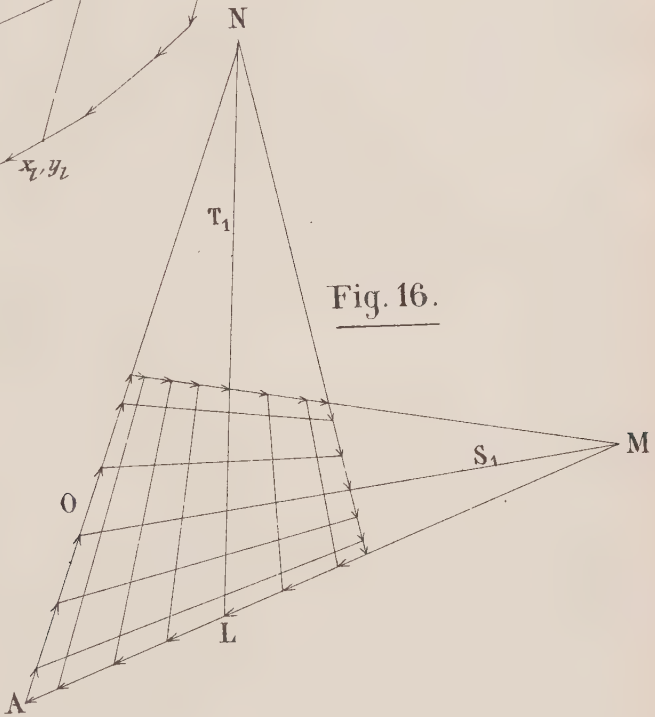


Fig. 17.

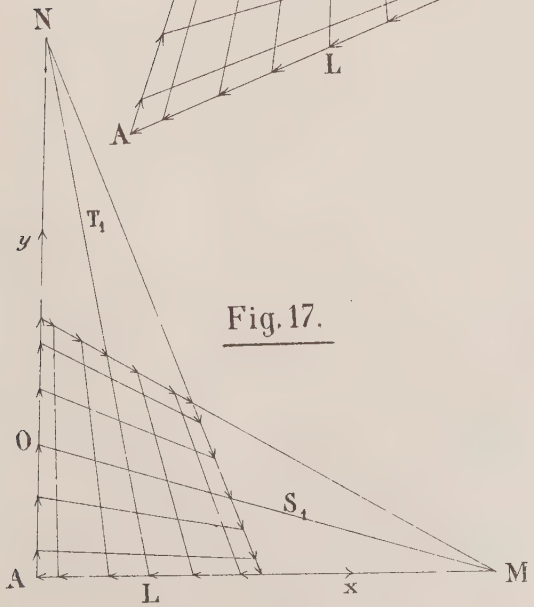
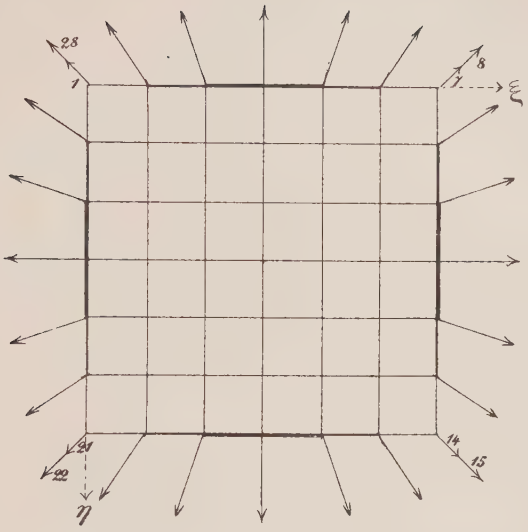


Fig. 18.

a



b

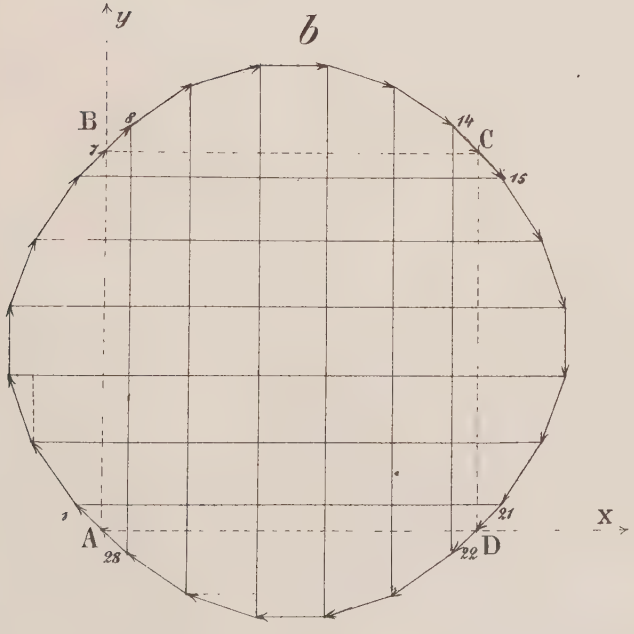


Fig. 19.

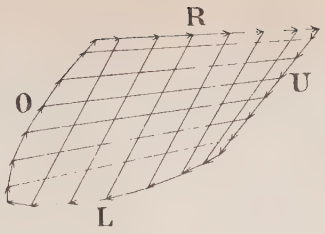
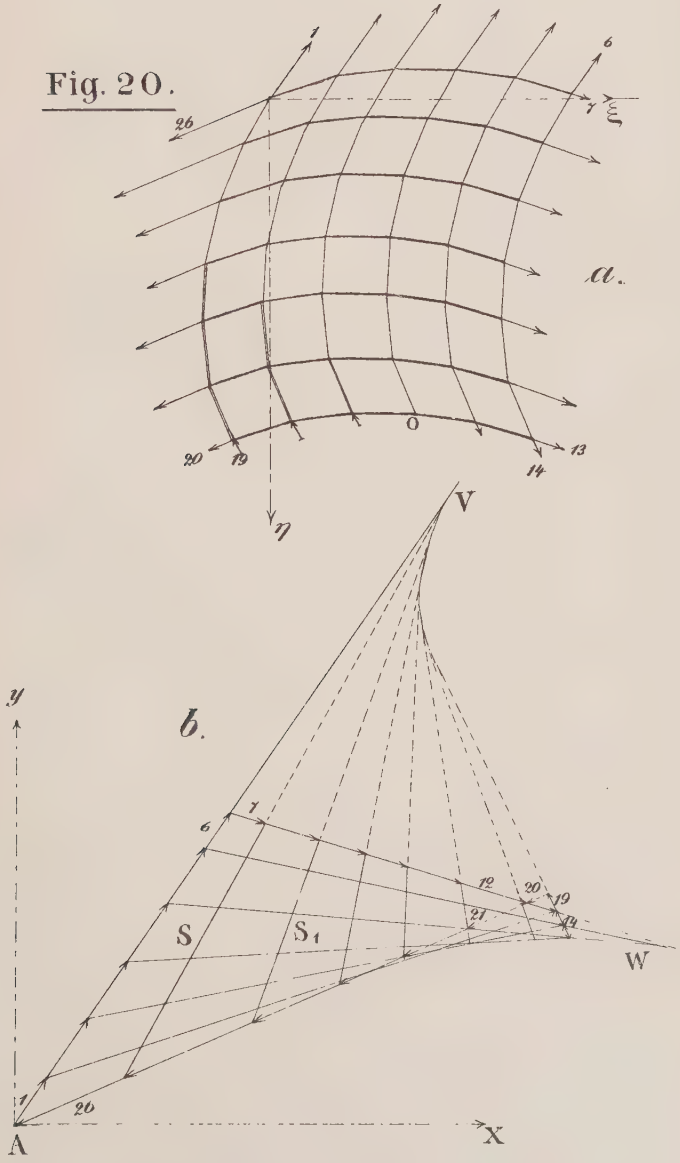
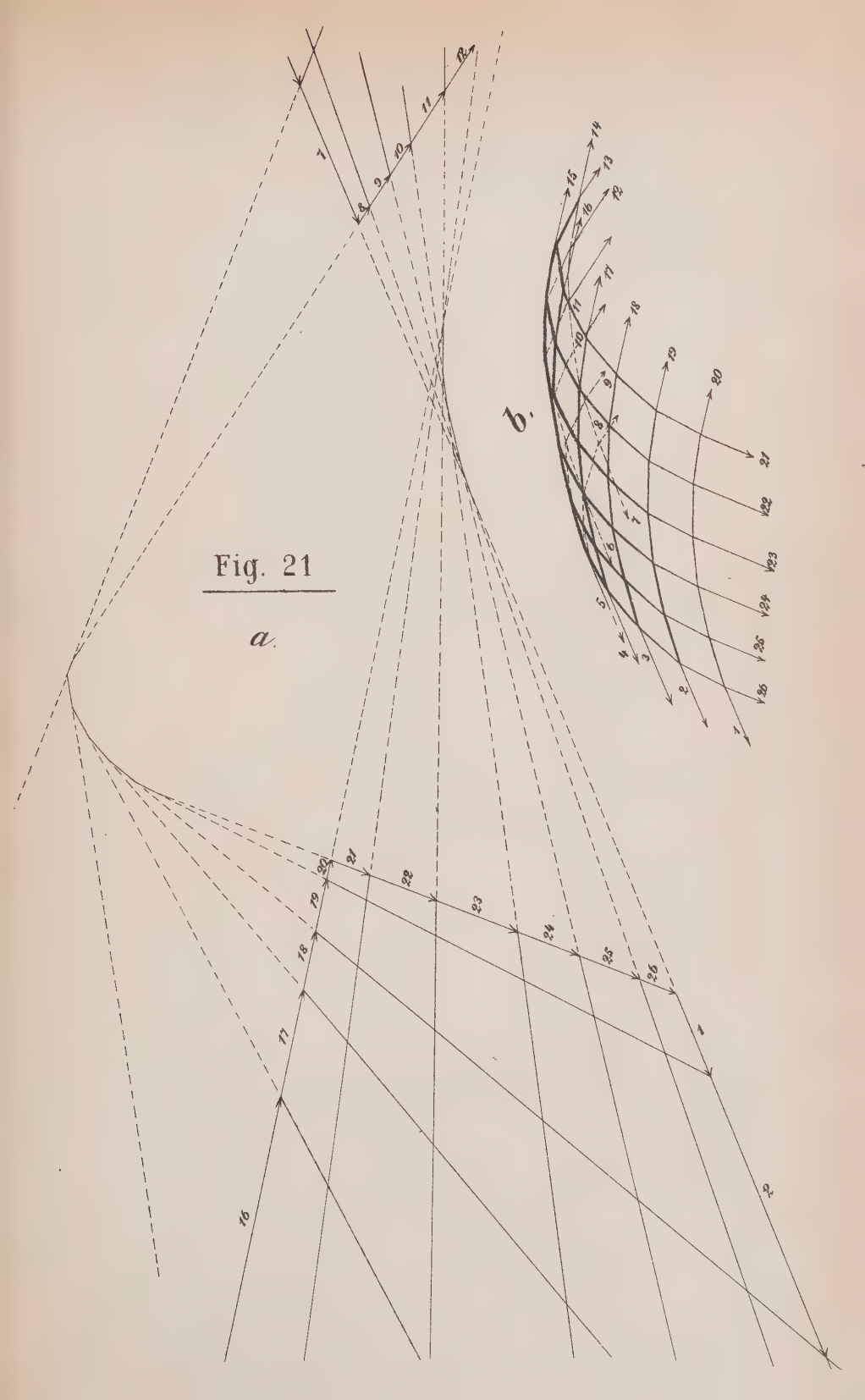


Fig. 20.




b.
Fig. 21
a.

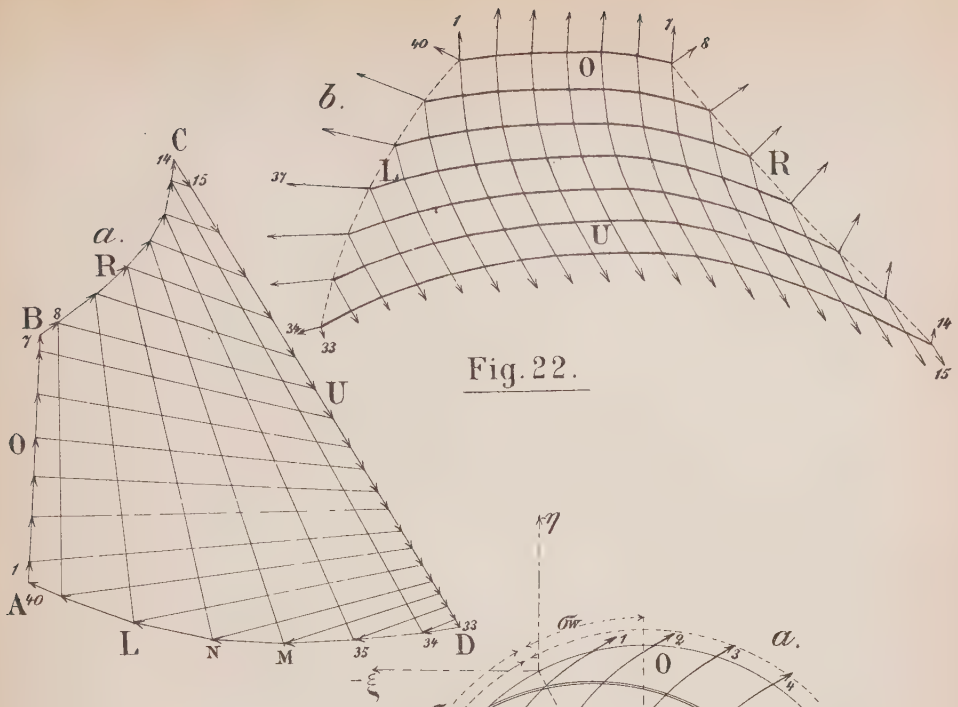


Fig. 22.

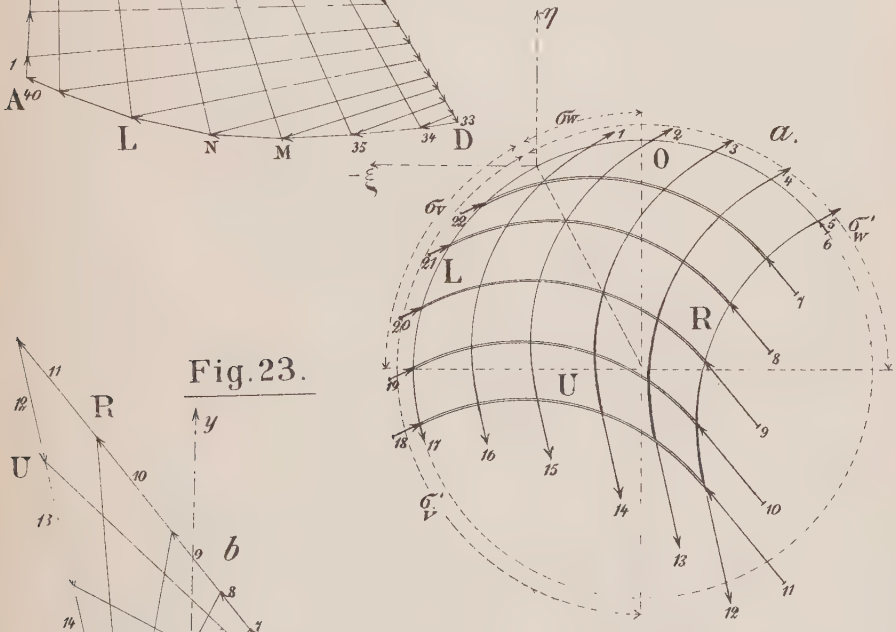


Fig. 23.

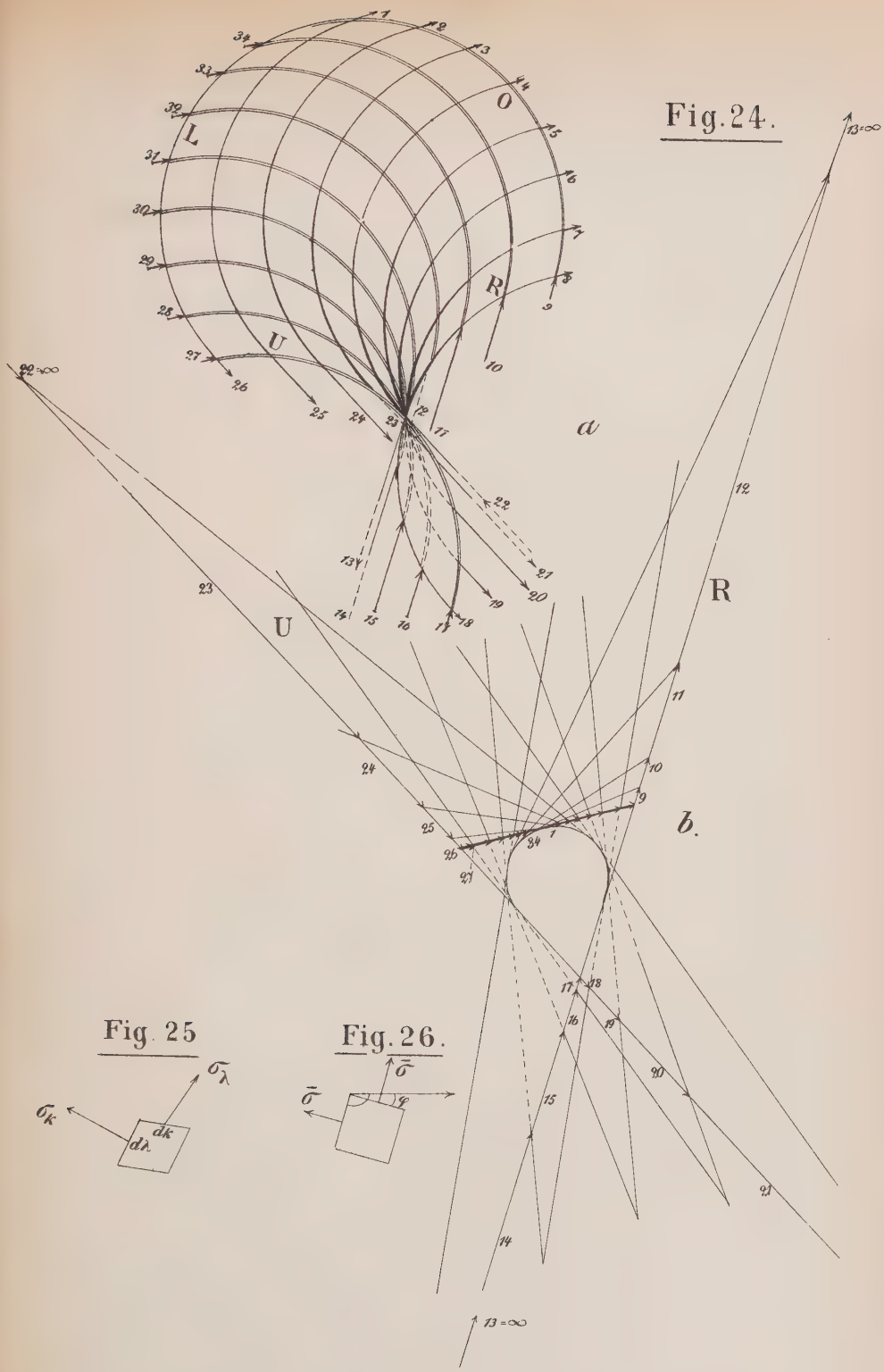


Fig. 24.
a
b.
L
O
R
U
R
U
13=∞
22=∞
13=∞
Fig. 25
Fig. 26.

Fig. 27.

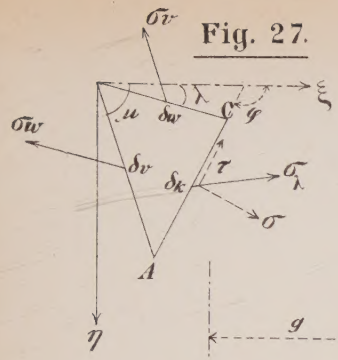


Fig. 28.

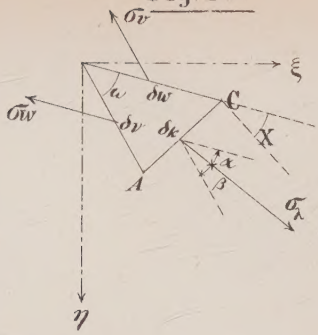


Fig. 29.

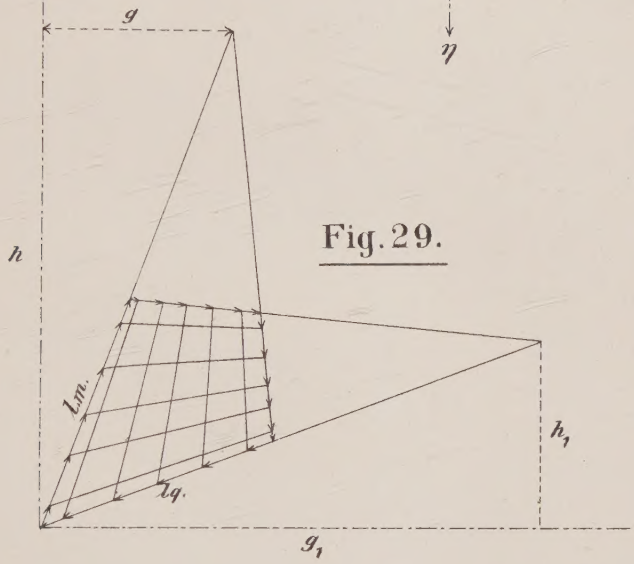
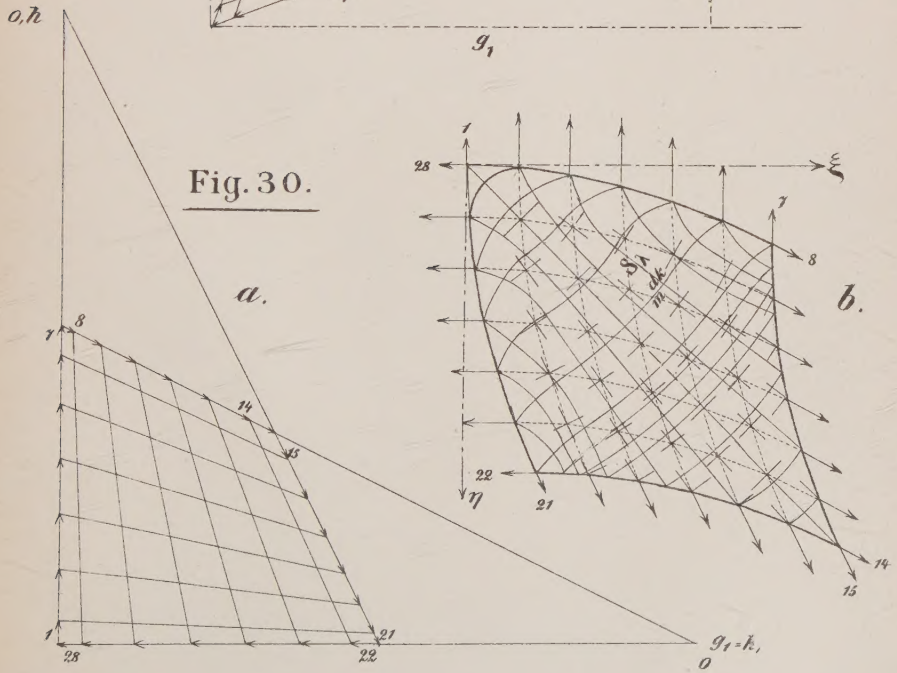



Fig. 30.